

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE MAR DEL PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA**

Defectos en la ecuación vectorial compleja de Ginzburg-Landau

Por
Adrian Jacobo

Director: Dr. Miguel Hoyuelos

Noviembre 2003

Índice

1. Introducción.....	3
1.1. Inestabilidades y ecuaciones de amplitud.....	3
2. Ecuaciones de un láser para un gas de átomos de dos niveles.....	6
2.1. Ecuaciones de Maxwell – Bloch.....	6
2.1.1. Las ecuaciones de Bloch.....	7
2.1.2. Las ecuaciones de Maxwell.....	14
2.1.3. Las ecuaciones de Maxwell-Bloch para un gas de átomos de dos niveles. 15	15
2.2. Ecuación de Ginzburg-Landau Compleja (CGL).....	17
3. Estabilidad de las soluciones homogéneas de la VCGLE.....	27
3.1. Estabilidad para $Q_+ = 0$ y $Q_- = 0$	28
3.2. Estabilidad para $Q_+ = 0$ y $Q_- \neq 0$	29
3.3. Estabilidad para $Q_+ \neq 0$ y $Q_- \neq 0$	29
4. Defectos en la VCGLE.....	31
4.1. Definición.....	31
4.2. Clasificación de los defectos.....	32
4.2.1. Caso $\alpha = \beta = 0$	32
4.2.2. Caso $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$	34
4.3. Relación entre el tamaño de los defectos y el parámetro γ	38
4.3.1. Caso $\alpha = \beta = 0, \gamma \rightarrow 1^+$	38
4.3.2. Caso $\alpha = \beta = 0, \gamma \rightarrow 1^-$	42
4.3.3. Caso $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \rightarrow 1^-$	43
4.3.4. Caso $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \rightarrow 1^+$	45
4.3.5. Tamaño real de los defectos.....	45
5. Conclusiones.....	46
6. Agradecimientos.....	48

1. Introducción

1.1. Inestabilidades y ecuaciones de amplitud

Consideremos un sistema físico cuyo comportamiento presenta formación de patrones. Estos sistemas, están descritos a menudo por un conjunto de ecuaciones no lineales en derivadas parciales, que pueden ser escritas de manera general como:

$$\partial_t \vec{U}(x, t) = \vec{G}[\vec{U}, \partial_x \vec{U}, \dots, R] \quad (1-1)$$

donde \vec{G} es una función que en general es no lineal, de \vec{U} y sus derivadas espaciales, y R es el llamado parámetro de control.

En general, las ecuaciones no lineales no pueden resolverse analíticamente, por lo que se intenta describir sus soluciones cualitativamente o perturbativamente. La situación general, es que los patrones aparecen en el sistema cuando el parámetro de control excede cierto valor crítico que llamaremos R_c . Las ecuaciones de amplitud describen la modulación lenta en el espacio y el tiempo cuando el parámetro de control se encuentra cerca del valor crítico.

Supongamos que el sistema considerado en (1-1) tiene un estado fundamental que es homogéneo, y que exhibe una inestabilidad de longitud de onda finita cuando $R > R_c$. Sin pérdida de generalidad definimos un nuevo parámetro de control ε , de manera tal que la inestabilidad aparezca cuando ε se vuelve positivo. La existencia de una inestabilidad de longitud de onda finita, significa que si consideramos la evolución de un modo de Fourier $e^{-i\Omega t + ikx}$, el ritmo de crecimiento $\text{Im}(\Omega)$ de cada modo k presenta un comportamiento como el que se muestra en la Figura 1-1. Para $\varepsilon < 0$ todos los modos decaen con el tiempo ($\text{Im}(\Omega) < 0$), por lo que el estado fundamental es estable. Si llamamos k_c al número de onda del modo cuyo ritmo de crecimiento es cero cuando $\varepsilon = 0$, entonces podemos ver que hay una banda fina para la cual el ritmo de crecimiento es levemente positivo (de orden ε) para $\varepsilon > 0$.

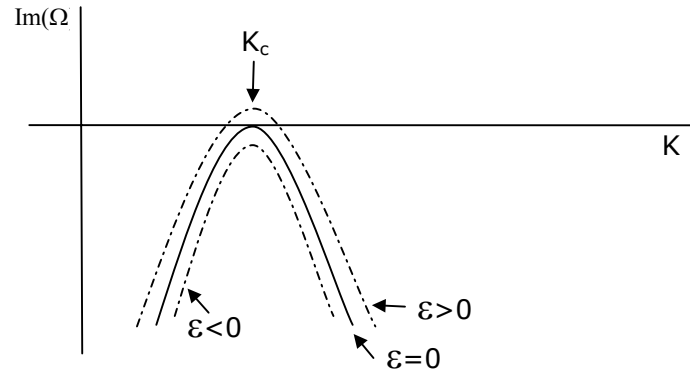


Figura 1-1: Comportamiento del ritmo de crecimiento como función del número de onda k

Asumamos que los patrones de la transición corresponden a una bifurcación supercrítica, es decir, que las no-linealidades están saturadas de modo que los patrones cerca del límite $\varepsilon = 0$ tienen pequeña amplitud. Esperamos también que los patrones cerca del umbral, es decir $0 < \varepsilon \ll 1$, tendrán una longitud de onda cercana a $2\pi/K_c$. Sin embargo, debido a que el ancho de la banda de modos inestables es de orden $\varepsilon^{1/2}$, puede haber modulaciones lentas de los patrones en escalas de longitud de orden $1/\varepsilon^{1/2}$. Cerca del umbral un campo físico se vería como el de la Figura 1-2.

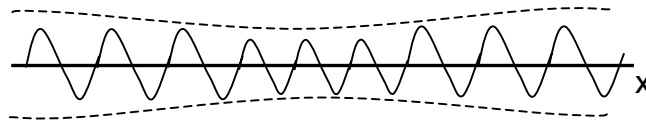


Figura 1-2. Modulación lenta de los modos críticos para $\varepsilon \ll 1$. La envolvente está indicada por la línea punteada.

Si $\text{Re}(\Omega) = 0$, la amplitud de los modos cerca de k_c crece con el tiempo para $\varepsilon > 0$, pero cada modo es estacionario en el espacio. Esta situación ocurre cerca de una bifurcación hacia patrones estacionarios. Si $\text{Re}(\Omega) \neq 0$, cada modo corresponde a patrones de tipo de ondas viajeras. La dinámica de los patrones puede separarse en términos de una componente rápida (con la escala de longitud definida por k_c) y una lenta definida por la envolvente. Al hacer esto se obtienen la ecuación de Ginzburg-Landau real para el primer caso ($\text{Re}(\Omega) = 0$), y la ecuación de Ginzburg-Landau Compleja para el segundo caso ($\text{Re}(\Omega) \neq 0$). El procedimiento para obtener dicha ecuación, y la

forma de la misma quedarán claros en la sección 2.2 donde se obtendrá la ecuación compleja partiendo de las ecuaciones de Maxwell-Bloch para un láser de dos niveles.

Cuando un sistema pasa de un estado homogéneo a un estado con patrones, se dice que hay una bifurcación en el sistema. En el caso de $\text{Re}(\Omega) \neq 0$, la bifurcación que atraviesa el sistema es llamada *bifurcación de Hopf*. Existen otros tipos de bifurcaciones¹ y su aparición depende de las simetrías del sistema; pero para cada tipo de bifurcación puede obtenerse una ecuación de una forma similar a la que se discutió anteriormente. Las ecuaciones que describen un sistema cerca de una bifurcación se llaman *ecuaciones de amplitud* y describen las modulaciones lentas en el espacio y en el tiempo, eliminando del análisis los modos más rápidos y simplificando el tratamiento de los sistemas. Esto introduce un concepto de universalidad en el estudio de sistemas con formación de patrones (similar al que aparece para las transiciones de fase) ya que las propiedades de los patrones (soluciones de las ecuaciones de amplitud) no dependen del sistema en particular, sino de unas pocas bifurcaciones posibles; lo que permite caracterizar sistemas de los orígenes más variados (sistemas biológicos, químicos, físicos, etc.) mediante el estudio de estas ecuaciones.

2. Ecuaciones de un láser para un gas de átomos de dos niveles

2.1. Ecuaciones de Maxwell – Bloch

Las ecuaciones de Maxwell-Bloch describen la interacción entre la materia y la radiación electromagnética cuando la luz incidente es lo suficientemente intensa como para que dicha interacción sea significativa. La materia tiene, en general muchos grados de libertad y sería imposible escribir las ecuaciones dinámicas para cada uno de ellos. Sin embargo, debido a que el acoplamiento entre la materia y la luz es débil, y a que el campo eléctrico puede descomponerse en ondas monocromáticas, sólo los grados de libertad que pueden resonar directa o indirectamente con el campo eléctrico tendrán una influencia a largo plazo.

La resonancia directa ocurre en intervalos aislados del espectro a frecuencias visibles o ultravioletas (10^{15} s^{-1}), donde el campo interactúa con las transiciones electrónicas, infrarrojo (10^{13} s^{-1}), con los modos vibracionales y en el rango de infrarrojo-microondas (10^{11} s^{-1}) con los modos rotacionales. Los modos de menor frecuencia pueden ser excitados a frecuencias ópticas ($\sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$) a través de procesos de resonancia indirecta en los cuales la diferencia de frecuencias y vectores de onda de dos ondas, llamados la onda de bombeo y la onda de Stokes, igualan la frecuencia y el vector de ondas de alguno de los modos de baja frecuencia.

Como el acoplamiento entre la luz y la materia es débil excepto para las zonas donde existe resonancia, se puede reducir el número de ecuaciones a un número manejable, y el modelo resultante da una visión bastante precisa del comportamiento observado. Pero la influencia de todos los demás grados de libertad también debe ser tomada en cuenta, porque si bien su efecto individual es despreciable, por ser muchos producen un efecto colectivo. Este efecto se incluye en el análisis insertando un término disipativo llamado “*ensanchamiento homogéneo*” (*homogeneous broadening*), que simula la disipación de energía de los modos de excitación considerados hacia los muchos otros modos y

además tiene en cuenta las fluctuaciones cuánticas del campo eléctrico clásico. En el límite en que este proceso de atenuación es relativamente rápido, se pueden eliminar adiabáticamente las variables de la materia y escribir las ecuaciones en términos del campo eléctrico.

2.1.1. Las ecuaciones de Bloch

Las velocidades ultrarrápidas de los electrones alrededor del núcleo, los movimientos vibratorios mucho más lentos de los núcleos y los movimientos de rotación de las moléculas, más lentos aún, se encuentran todos cuantizados en la materia. La relación fundamental entre la energía y la frecuencia ($E=\hbar\omega$) y las diferentes escalas temporales de los distintos tipos de movimiento, llevan a una separación natural del espectro discreto de energías de la materia en conjuntos sucesivamente mas pequeños de estados cuánticos asociados con los grados de libertad de los movimientos de los electrones, las vibraciones de los átomos y las rotaciones de las moléculas. Esto es lo que nos indica la aproximación de Born-Oppenheimer, que nos permite reducir un problema de autovalores imposible de resolver a un conjunto de problemas para cada tipo de movimiento. En efecto, supondremos que la función de onda que describe al problema de autovalores completo es separable en el producto de funciones de ondas para cada grado de libertad, con dependencia explícita en las coordenadas que representan cada tipo de movimiento. El problema de autovalores que define el espectro de energías esta determinado por la masa efectiva que aparece en el operador de energía cinética y por la naturaleza del potencial. Este último es el potencial de Coulomb para el movimiento de los electrones alrededor del núcleo, el de Morse (u oscilador no armónico) para los movimientos vibratorios de los núcleos y el potencial del rotor rígido, para la rotación de las moléculas.

Matemáticamente, el estado de la materia está descrito por la función de onda ψ y el Hamiltoniano H cuyos autovalores definen el espectro de energía. Para el estado sin perturbaciones, escribiremos el Hamiltoniano H_0 con sus correspondientes autovalores E_j dados por $\hbar\omega_j$, es decir:

$$H_0 \psi_j = \hbar \omega_j \quad j = 1, \dots, N. \quad (2-1)$$

y los autoestados $\{\psi_j\}$ forman una base ortonormal

$$\int \psi_j^* \psi_k d\bar{R} = \delta_{jk} \quad (2-2)$$

para el espacio de Hilbert al cual pertenecen las autofunciones.

El campo eléctrico será tratado como una variable clásica debido a que el flujo de fotones es grande. Por ejemplo, para un láser de He-Ne con una intensidad de flujo de un kilowatt por metro cuadrado, el flujo de fotones es del orden de 10^{21} fotones por metro cuadrado por segundo.

Supongamos ahora que una fuente de luz que contiene uno o más trenes de onda cuasi monocromáticos de diferentes frecuencias, es aplicado a un material que en el estado sin perturbar tiene diferencias de frecuencias $\omega_{jk} = \omega_j - \omega_k$ que están próximas a algunas de las del campo aplicado. Los fotones son absorbidos y los átomos pasan a estados de mayor energía. Clásicamente puede interpretarse como que el campo eléctrico cambia la forma de la nube electrónica alrededor de los átomos induciendo un momento dipolar efectivo. Al oscilar el campo, el dipolo oscila irradiando, lo que modifica el campo externo. Nuestro objetivo es calcular el vector de polarización

$$\bar{P} = n_a e \int \bar{R} \psi \psi^* d\bar{R} \quad (2-3)$$

inducido por el campo eléctrico aplicado \bar{E} en (2-3), n_a es la densidad volumétrica de átomos y e la carga eléctrica.

Para calcular \bar{P} partimos de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (2-4)$$

donde el Hamiltoniano H es la suma del Hamiltoniano sin perturbar H_0 y el potencial $\delta V = -e \int \vec{E} \cdot \vec{R}$ donde \vec{E} es el campo externo.

Como $\vec{E}(\vec{r}, t)$ prácticamente no cambia para distancias atómicas, podemos escribir

$$\delta V = -e \vec{E} \cdot \vec{R} \quad (2-5)$$

y considerar a \vec{E} como constante para distancias atómicas $|| \vec{R} ||$. Para las intensidades de interés en un láser, el potencial de perturbación generalmente es mucho menor que el potencial $V_0(\vec{R})$ del Hamiltoniano sin perturbar H_0 , que es el potencial de Coulomb entre el electrón y el núcleo, para las transiciones electrónicas, o los potenciales de Morse o el rotor rígido si consideramos las rotaciones y vibraciones en las uniones químicas.

Resolvemos la ecuación (2-4) asumiendo que podemos escribir

$$\psi(\vec{R}, t) = \sum_{j=1}^N a_j(t) \psi_j(\vec{R}) \quad (2-6)$$

donde $\psi_j(\vec{R})$ son los estados sin perturbar. Estos pueden elegirse de manera que $\int \vec{R} \psi_j(\vec{R}) d\vec{R}$ y $\int \vec{R} \psi_j \psi_j^* d\vec{R}$ sean cero. Si $H = H_0$ entonces

$$a_j(t) = a_j(0) e^{-i\omega_j t} \quad (2-7)$$

La polarización por átomo está dada por

$$\vec{P}_{atomo} = e \int \vec{R} \psi \psi^* d\vec{R} = \sum_{jk} \rho_{jk} \vec{p}_{jk} = Tr \vec{p} \rho \quad (2-8)$$

y en la base $\{\psi_j\}$ los elementos de la matriz de densidad $\rho_{jk} = a_j a_k^*$ dependen del tiempo, y la matriz dipolar, independiente del tiempo es

$$\vec{p}_{jk} = e \int \vec{R} \psi_j^* \psi_k d\vec{R} \quad (2-9)$$

Los elementos de matriz $\rho_{jk}(t)$ pueden ser relacionados directamente con observables físicos, en contraste con las amplitudes de probabilidad $a_j(t)$. Los términos diagonales dan la probabilidad de ocupación de un estado cuántico particular, mientras que los términos no diagonales están relacionados directamente con la polarización asociada a una determinada transición inducida por la onda electromagnética.

La polarización total esta dada por

$$\vec{P} = n_a \vec{P}_{atomo} \quad (2-10)$$

Ahora debemos calcular \vec{P}_{atomo} y escribir las ecuaciones dinámicas para los elementos de la matriz densidad ρ_{jk} .

Primero derivaremos las ecuaciones para la amplitud de probabilidad $a_j(t)$ sustituyendo (2-6) en (2-4) con $H = H_0 - e\vec{E} \cdot \vec{R}$, usando (2-1), y multiplicando la ecuación por ψ_k^* . Así obtenemos, usando (2-2)

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i\omega_k a_k + \frac{i\vec{E}}{\hbar} \sum_{l=1}^N \vec{p}_{kl} a_{kl} \quad k=1, \dots, N. \quad (2-11)$$

Reemplazamos k por j y multiplicamos por a_j^* , luego multiplicamos el conjugado complejo de (2-11) por a_j , y sumamos ambas ecuaciones obteniendo

$$\frac{\partial \rho_{jk}}{\partial t} = -i(\omega_j - \omega_k)\rho_{jk} + \frac{i\vec{E}}{\hbar} \cdot \sum_{l=1}^N \vec{p}_{jl}\rho_{jk} - \frac{i\vec{E}}{\hbar} \cdot \sum_{l=1}^N \vec{p}_{lk}\rho_{jl} \quad j,k=1,\dots,N \quad (2-12)$$

donde utilizamos el hecho de que $\vec{p}_{lk} = \vec{p}_{kl}$. Estas son las ecuaciones de Bloch “en crudo”. Se las llama así porque son $N - 1 + N(N-1)/2$ ecuaciones, donde N son los grados de libertad del material. Ahora reduciremos estas ecuaciones a un número mucho menor quedándonos solo con los estados dinámicamente relevantes.

La ecuación (2-12) puede resolverse fácilmente si despreciamos los términos que dependen del campo eléctrico \vec{E} . Veamos entonces cual es la contribución de estos términos frente a los términos sin \vec{E} . La relación es:

$$\frac{Ep}{\hbar\omega} = \frac{\omega_{rabi}}{\omega} \approx 10^{-4} - 10^{-7} \quad (2-13)$$

donde E , p , y ω son las magnitudes típicas del campo eléctrico, un elemento de matriz de dipolo eléctrico y las diferencias de frecuencias $\omega_{jk} = \omega_j - \omega_k$, respectivamente. Esta última corresponde a una transición electrónica y es de aproximadamente 10^{-15} s^{-1} . La inversa de la frecuencia de Rabi mide el tiempo que tarda la energía en ser transferida del campo a los átomos y volver al campo.

Como puede verse, estos términos perturbativos pueden ser ignorados pero hay que tener en cuenta el efecto que producen los términos que tienen resonancias con frecuencias naturales $\omega_{jk} = \omega_j - \omega_k$ del material, estos términos producen una modificación en el comportamiento de ρ_{jk} . Podemos ver que

$$\rho_{jk} - \rho_{jk}(0)e^{-i\omega_{jk}t} \propto \frac{E p}{\hbar} t e^{-i\omega_{jk}t} \quad (2-14)$$

así que para tiempos del orden del inverso de la frecuencia de Rabi, el efecto acumulativo de las resonancias produce un cambio de orden uno en los elementos de la matriz densidad. Por lo tanto debemos quedarnos con los términos en

$$\frac{i\vec{E}}{\hbar} \cdot \sum_{l=1}^N \vec{p}_{jl} \rho_{jk} - \frac{i\vec{E}}{\hbar} \cdot \sum_{l=1}^N \vec{p}_{lk} \rho_{jl} \quad (2-15)$$

que tengan frecuencias iguales o cercanas a ω_{jk} . Todos los demás, lo que incluye a la mayoría, pueden ser descartados.

Si bien los términos no resonantes pueden ser eliminados, al ser muchos (del orden de N^2), pueden ejercer algún efecto acumulativo sobre la pequeña cantidad de niveles resonantes (n niveles). Además existe un efecto no trivial debido a la interacción entre los niveles resonantes y las fluctuaciones cuánticas del campo eléctrico alrededor del valor clásico. El efecto combinado de estas interacciones es considerable y produce en el sistema una relajación irreversible, una pérdida gradual de energía de los modos de interés al baño térmico formado por todos los demás estados y las fluctuaciones cuánticas del campo eléctrico. Esta pérdida es representada fenomenológicamente agregando términos de decaimiento $-\gamma_{jk}\rho_{jk}$ en el lado derecho de (2-12) para los n niveles j,k que están en resonancia con el campo eléctrico. Así hemos reducido un conjunto de $(N(N-1)/2) + N-1$ ecuaciones a un conjunto mucho menor de $(n(n-1)/2) + n - 1$ con términos de pérdida. Los términos diagonales γ_{jj} son los ritmos de decaimiento debido a pérdidas irreversibles al baño térmico de fluctuaciones cuánticas alrededor del campo clásico y a estados ligados de baja energía. Los términos γ_{jk} tienen contribuciones adicionales debidas a las colisiones elásticas entre los átomos. Estos términos de decaimiento son llamados *ensanchamiento homogéneo*, y su inversa, tiempo de *ensanchamiento homogéneo*.

El último paso es identificar las posibles resonancias.

La primera es la *resonancia directa*. La frecuencia ω del campo eléctrico \vec{E} es cercana a ω_{jk} . Esto ocurre en aquellos productos $\vec{E} \cdot \sum \vec{p}_{jl} \rho_{kk}$ que contienen los términos diagonales de ρ que no tienen dependencia lineal con el tiempo. Esta es la interacción fuerte que ocurre en un láser.

La interacción de tipo “corriente continua” se da en los términos en los términos como $\vec{E} \cdot \sum \vec{p}_{jl} \rho_{jk}$ en los que la frecuencia $-\omega$ en \vec{E} cancela la frecuencia $\omega_{jl} \approx \omega$ en ρ_{jl} y da una contribución acumulativa a largo plazo a ρ_{jj} .

La resonancia paramétrica ocurre cuando alguna de las combinaciones de a pares de las frecuencias del campo $\pm\omega_r$ con las diferencias de frecuencias de los dipolos $\pm\omega_{lk}$ son iguales a otra diferencia de frecuencias $\pm\omega_{jk}$. Esto crea una interacción fuerte entre diferentes elementos de la matriz densidad mediada por los paquetes de onda del campo eléctrico.

Las ecuaciones de Bloch para los n niveles resonantes son

$$\frac{\partial \rho_{jk}}{\partial t} = -(\gamma_{jk} + i\omega_{jk})\rho_{jk} + \frac{i\vec{E}}{\hbar} \cdot \sum_{l=1}^n \vec{p}_{jl} \rho_{lk} - \frac{i\vec{E}}{\hbar} \cdot \sum_{l=1}^n \vec{p}_{lk} \rho_{jl} \quad (2-16)$$

Como el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ depende de la posición \vec{r} y del tiempo t, también lo harán los coeficientes de la matriz de densidad. El vector polarización está dado por

$$\vec{P} = n_a \sum \vec{p}_{jk} \rho_{jk} = n_a \text{Tr} \vec{p} \rho \quad (2-17)$$

2.1.2. Las ecuaciones de Maxwell

La estructura espacial de los campos esta dada por la geometría del espacio en el que se propagan. La ecuación que gobierna al campo es

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (2-18)$$

Si consideramos en particular un modo TEM, por ejemplo el modo TEM₀₀, podemos escribir el campo eléctrico \vec{E} y la polarización \vec{P} como

$$\vec{E} = \vec{A}(t)V(x, y, z)e^{-i\omega_c t} + (*) \quad (2-19)$$

$$\vec{P} = \vec{\Lambda}(t)V(x, y, z)e^{-i\omega_c t} + (*) \quad (2-20)$$

donde $V(x, y, z)$ tiene la forma del modo TEM₀₀ y ω_c es su correspondiente frecuencia. Utilizando la aproximación para una envolvente que varía lentamente se llega a

$$\frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{k}{c} \vec{A} = \frac{i\omega_c}{2\epsilon_0 c} \vec{\Lambda} \quad (2-21)$$

para la amplitud del modo en la cavidad. En (2-21) se incluye el término de atenuación $(k/c)\vec{A}$ donde $k = (\sigma/\epsilon_0) + (c/L)\ln(1/\sqrt{r})$.

En la cavidad, las pérdidas más importantes son debido a los espejos de la cavidad (R es la reflectividad y L la distancia entre espejos), pero también hay una pérdida más débil debido a la conductividad finita σ del medio.

2.1.3. Las ecuaciones de Maxwell-Bloch para un gas de átomos de dos niveles.

Ahora deduciremos las ecuaciones que gobiernan la interacción de una onda electromagnética unidimensional en una cavidad, con un gas formado por átomos de dos niveles.

La polarización en este caso toma la forma

$$\vec{P} = n_a (\vec{p}_{12} \rho_{12} + \vec{p}_{21} \rho_{21}) \quad (2-22)$$

Asumiremos por simplicidad que el campo eléctrico está polarizado en la dirección $\hat{e}(\vec{A}(x, y, t) = \hat{e}A(x, y, t))$ y la dirección de los elementos de la matriz dipolar es paralela a la del campo eléctrico. Puede verse además, que el campo en la dirección \vec{p}_{12} es más importante, por eso tomamos \hat{e} en dicha dirección. Tomaremos también a \vec{p}_{12} como real, sin pérdida de generalidad ya que podemos incluir cualquier fase en ρ_{12} . Escribimos $\vec{p}_{12} = \vec{p}_{21} = p\hat{e}$. Entonces de (2-20) y (2-22) podemos identificar

$$n_a p \rho_{12} = \Lambda(t) V(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (2-23)$$

donde

$$\vec{\Lambda}(t) = \hat{e} \Lambda(t) \quad (2-24)$$

Recordemos que por definición $\rho_{12} = \rho_{21}^*$. La ecuación de Bloch para ρ_{12} es

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} + (\gamma_{12} + i\omega_{12}) \rho_{12} = \frac{iEp}{\hbar} (\rho_{22} - \rho_{11}) \quad (2-25)$$

y la ecuación para $\rho_{22} - \rho_{11}$ es

$$\frac{\partial(\rho_{22} - \rho_{11})}{\partial t} + \gamma_{11}(\rho_{22} - \rho_{11}) = 2 \frac{iEp}{\hbar} (\rho_{12} - \rho_{12}^*) \quad (2-26)$$

donde tomamos iguales los elementos diagonales γ_{11} y γ_{22} . Cabe notar que no todos los términos en el lado derecho de (2-26) serán relevantes porque no todos están en resonancia con la frecuencia “cero” de $\rho_{22} - \rho_{11}$.

Es conveniente ahora definir $N = n_a(\rho_{22} - \rho_{11})$ que mide la diferencia entre las probabilidades de ocupación de los niveles 1 y 2.

Debido a los términos de pérdida, hay que suministrarle energía al sistema para mantenerlo activo. Simularemos esto agregando un término constante $\gamma_{11}N_0$ al lado derecho de la ecuación para la inversión del medio.

De aquí obtenemos las ecuaciones de Maxwell-Bloch para una onda unidireccional polarizada linealmente en una cavidad con un gas de átomos de dos niveles

$$\frac{\partial A}{\partial t} - ia\nabla^2 A = -kA + \frac{i\omega_c}{2\varepsilon_0} \Lambda \quad (2-27)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + (\gamma_{12} + i(\omega_{12} - \omega_c))\Lambda = \frac{ip^2}{\hbar} AN \quad (2-28)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \gamma_{11}(N - N_0) = \frac{2i}{\hbar} (A^* \Lambda - A \Lambda^*) \quad (2-29)$$

donde en (2-27) se agrego el término de difracción $-ia\nabla^2 A$.

2.2. Ecuación de Ginzburg-Landau Compleja (CGL)

Como fue dicho anteriormente, ahora deduciremos la ecuación de Ginzburg-Landau Compleja (CGLE) a partir de las ecuaciones de Maxwell-Bloch. Si bien en el trabajo se utiliza la ecuación vectorial (VCGLE), por simplicidad deduciremos la ecuación escalar.

Partiendo de las ecuaciones obtenidas en la sección anterior, realizamos el siguiente cambio de variable

$$A' = \frac{2p}{\hbar\omega} A \quad ; \quad P = i \frac{\omega c p}{\varepsilon_0 k \hbar \gamma_{12}} \Lambda \quad ; \quad n = \frac{\omega_c p^2}{2\varepsilon_0 \hbar k \gamma_{12}} (N - N_0)$$

$$t' = t \gamma_{12} \quad ; \quad \Omega = \frac{\omega_{12} - \omega_c}{\gamma_{12}} \quad ; \quad \sigma = \frac{k}{\gamma_{12}} \quad ; \quad a' = \frac{a}{\gamma_{12}} \quad ; \quad b = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} \quad ; \quad r = \frac{\omega_c p^2 |N_0|}{2\varepsilon_0 \hbar k \gamma_{12}}$$

Por simplicidad eliminamos las primas de las nuevas variables y obtenemos (2-27), (2-28) y (2-29)

$$\frac{\partial A}{\partial t} - ia \nabla^2 A = -\sigma A + \sigma P \quad (2-30)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (1 + i\Omega)P = (r - n)A \quad (2-31)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -bn + \frac{1}{2}(AP^* + A^*P) \quad (2-32)$$

Los parámetros a, σ, Ω, b miden la difracción, las pérdidas en la cavidad, la desintonía de la cavidad (la diferencia $\omega_{12} - \omega_c$ entre la frecuencia asociada con los niveles energéticos y la frecuencia de la cavidad) y las pérdidas debido a emisiones espontáneas a otros niveles (ensanchamiento homogéneo) respectivamente. Todas las constantes están medidas usando como unidad el

tiempo de decaimiento por ensanchamiento homogéneo del campo de polarización.

El paso inicial es analizar la estabilidad de la solución que no emite ($A = P = n = 0$) y determinar el valor crítico del parámetro r para el cual otras soluciones comienzan a crecer exponencialmente. Queremos encontrar la estructura de los modos que son neutralmente estables, débilmente estables o inestables cerca del valor crítico (r_c). A estos modos se los llama *set activo*. Todos los otros grados de libertad son llamados *set pasivo*, y sus amplitudes pueden ser escritas en función de las amplitudes de los modos activos.

Para linealizar las ecuaciones (2-30), (2-31) y (2-32) alrededor de la solución $A = P = n = 0$ hacemos $A = 0 + \delta A, P = 0 + \delta P, n = 0 + \delta n$ y despreciamos los términos cuadráticos en $\delta A, \delta P, \delta n$.

Así obtenemos

$$\begin{pmatrix} \delta A \\ \delta P \\ \delta n \end{pmatrix} = V_0 e^{\lambda t + i \vec{k} \cdot \vec{x}} \quad \vec{k} = (k_x, k_y) \quad (2-33)$$

y obtenemos que V_0 satisface

$$\Lambda V_0 = \begin{pmatrix} \lambda + \sigma + iak^2 & -\sigma & 0 \\ -r & \lambda + 1 + i\Omega & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + b \end{pmatrix} V_0 = 0 \quad (2-34)$$

donde el ritmo de crecimiento λ esta determinado por $\det \Lambda = 0$. Así encontramos que $\lambda = -b$ con el autovector

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\lambda^2 + (\sigma + 1 + iak^2 + i\Omega)\lambda + (\sigma + iak^2)(1 + i\Omega) - \sigma r = 0 \quad (2-35)$$

Escribimos $\lambda = \mu - i\nu$ y buscaremos los valores de r y k^2 para los cuales μ pasa por cero de negativo a positivo. Igualamos $\mu = 0$ y se obtiene

$$\nu = \frac{\sigma\Omega + ak^2}{\sigma + 1} \quad (2-36)$$

$$r = 1 + \frac{1}{(\sigma + 1)^2}(\Omega - ak^2) \quad (2-37)$$

Nos interesaremos para el caso en que Ω es menor que cero, para este caso surgirá la ecuación compleja de Ginzburg-Landau. Con $\Omega < 0$ el gráfico de r versus k es

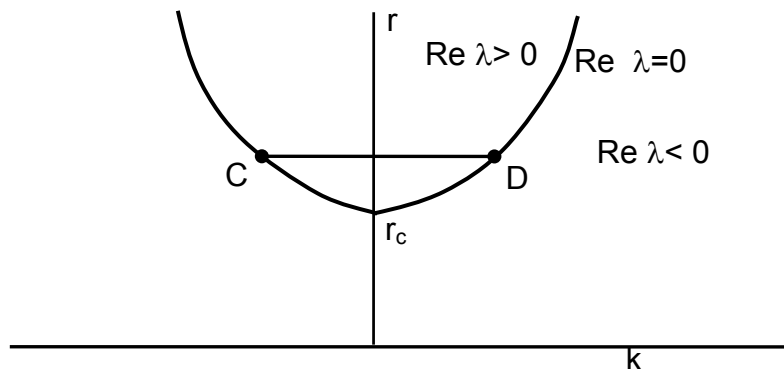


Figura 2-1: Curva de estabilidad neutral

La curva de la figura 2-1 es llamada la *curva de estabilidad neutral*. Para los valores de (r, k) por encima de la curva la solución que no emite se vuelve inestable y el sistema se convierte en un láser. Puede verse que el modo $k=0$ es el más inestable y la correspondiente frecuencia es

$$\nu = \frac{\sigma\Omega}{\sigma+1} \quad (2-38)$$

que corresponde a una frecuencia $\omega_c + \nu$ para el campo eléctrico de

$$\omega = \frac{\sigma\omega_{12} + \omega_c}{\sigma+1} \quad (2-39)$$

El láser es forzado a tomar una frecuencia que es un promedio pesado de la frecuencia de la cavidad (ω_c) y la diferencia de frecuencia entre los dos niveles (ω_{12}).

Ahora podemos identificar los modos activos y pasivos cerca de $r=r_c$. Debido a la dependencia transversal (x,y) hay un número infinito de estos modos. Para $r > r_c$ todos los modos \vec{k} que se encuentran en un círculo obtenido al rotar los puntos C y D de la figura 2-1 son modos activos.

Ahora trataremos el problema más simple sin difracción ($a = 0$) y vamos a encontrar el comportamiento temporal del sistema cerca de r_c , y luego extenderemos esto para el caso $a \neq 0$.

Al ignorar la difracción tenemos que

$$\nu = \nu_c = \frac{\sigma\Omega}{\sigma+1} \quad (2-40)$$

$$r = r_c = 1 + \frac{\Omega^2}{(\sigma+1)^2} \quad (2-41)$$

La forma del modo activo (el autovector asociado con el autovalor $\lambda = 0 - i\nu_c$ cuando $r=r_c$) es

$$\begin{pmatrix} \delta A \\ \delta P \\ \delta n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\nu_c t} = V_0^{(1)} e^{-i\nu_c t} \quad (2-42)$$

con

$$x_0 = 1 - i \frac{\Omega}{\sigma + 1}$$

Llamaremos $V_0^{(2)}$ al autovector correspondiente al segundo autovalor de (2-35) con parte real negativa. En $r=r_c$, cualquier vector \vec{v} en el espacio complejo A,P,n puede ser escrito como combinación lineal de $V_0^{(1)}, V_0^{(2)}$ y $V_0^{(3)}$,

$$\begin{pmatrix} A \\ P \\ n \end{pmatrix} = B_1 V_0^{(1)} e^{-iv_c t} + B_2 V_0^{(2)} e^{\lambda_2 t} + B_3 V_0^{(3)} e^{\lambda_3 t} \quad (2-43)$$

donde λ_2 y λ_3 están evaluados en $r=r_c$. Como la parte real de λ_2 y de λ_3 ($=-b$) es negativa y finita en $r=r_c$, cualquier punto en el espacio A,P,n es atraído en el tiempo hacia el vector $V_0^{(1)}$, porque los coeficientes $B_2 e^{\lambda_2 t}$ y $B_3 e^{\lambda_3 t}$ tienden a cero. Podemos esperar entonces que para valores de r cercanos a r_c , una condición inicial cualquiera (A,P,n) sea atraída en el espacio de fases hacia el vector $V_0^{(1)}$. Esto nos dice que podemos ahora escribir la solución de las ecuaciones (2-30), (2-31) y (2-32) cerca de $r=r_c$ en función de $V_0^{(1)}$.

Entonces asumiremos ahora que

$$r = r_c + R \quad (2-44)$$

con $R \ll 1$, y buscaremos soluciones para las ecuaciones (2-30), (2-31) y (2-32) como una serie asintótica de la forma

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} A \\ P \\ n \end{pmatrix} = \varepsilon B_1(Rt) V_0^{(1)} e^{-iv_c t} + \varepsilon^2 \vec{v}_1 + \varepsilon^3 \vec{v}_2 \quad (2-45)$$

donde, como se verá, la elección correcta de ε es \sqrt{R} . En otras palabras, $V_0^{(1)}$ es el modo activo y $V_0^{(2)}$ y $V_0^{(3)}$, son los modos pasivos. Como ahora $r > r_c$ y como las ecuaciones son no lineales, $V_0^{(1)} e^{-iv_c t}$ que satisface la versión linealizada de estas ecuaciones para $r = r_c$, no satisface (2-30), (2-31) y (2-32) exactamente, así que permitiremos que la amplitud B_1 varíe lentamente con el tiempo $T=Rt$.

La ecuación para \vec{v}_1 es

$$L\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \sigma & -\sigma & 0 \\ -r_c & \frac{\partial}{\partial t} + 1 + \Omega & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} + b \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}(x_0 + x_0^*) \end{pmatrix} B_1 B_1^* \quad (2-46)$$

y la solución es

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{b} \end{pmatrix} B_1 B_1^* \quad (2-47)$$

La ecuación para \vec{v}_2 a orden $\varepsilon^3 = R^{3/2}$ es

$$L\vec{v}_2 \equiv - \begin{pmatrix} 1 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial T} e^{-iv_c t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} B_1 e^{-iv_c t} - \frac{1}{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} B_1^2 B_1^* e^{-iv_c t} \quad (2-48)$$

y buscamos soluciones de la forma $\vec{v}_2 = X e^{-iv_c t}$, así obtenemos

$$\Lambda_c X = \begin{pmatrix} -iv_c + \sigma & -\sigma & 0 \\ -r_c & -iv_c + 1 + i\Omega & 0 \\ 0 & 0 & -iv_c + b \end{pmatrix} X = F \quad (2-49)$$

con

$$F = - \begin{pmatrix} 1 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial T} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} B_1 - \frac{1}{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} B_1^2 B_1^* \quad (2-50)$$

Sea ahora U_0^T el vector columna tal que

$$U_0^T \Lambda_c = 0 \quad (2-51)$$

puede verse que $U_0^T = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma}{r_c} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces multiplicando (2-49) por U_0^T

$$U_0^T F = 0 \quad (2-52)$$

es decir

$$\frac{\partial B_1}{\partial T} \left(1 + \frac{\sigma}{r_c} x_0^2 \right) = \frac{\sigma x_0}{r_c} B_1 - \frac{\sigma x_0}{b r_c} B_1^2 B_1^* \quad (2-53)$$

entonces

$$F = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{r_c}{\sigma x_0} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial T} \quad (2-54)$$

y

$$X = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial T} \quad (2-55)$$

De aquí obtenemos que la solución es

$$\begin{pmatrix} A \\ P \\ n \end{pmatrix} = \sqrt{R} \begin{pmatrix} 1 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix} B_1 e^{-iv_c t} + \frac{1}{b} R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} B_1 B_1^* \quad (2-56)$$

$$+ (\sqrt{R})^3 \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial T} e^{-iv_c t} + \mathcal{O}(\sqrt{R})^4$$

donde B_1 satisface (2-53). La ecuación (2-56) puede ser escrita como combinación lineal de $V_0^{(1)}$, $V_0^{(2)}$ y $V_0^{(3)}$.

Consideremos ahora el caso en que $\Omega < 0$, y $a > 0$. En este caso buscaremos soluciones para A , P y n que sean integrables cuadráticas, es decir que puedan ser representadas por una serie de Fourier.

De la figura 2-1 podemos ver que sólo crecen los modos $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$ cuyo número de onda $k = |\vec{k}|$ están dentro de la banda CD (de ancho \sqrt{R}). El vector de onda \vec{k} se encuentra en un círculo b alrededor del origen, de diámetro CD.

Entonces, en lugar de representar los modos activos como

$$\vec{v}_0 = \sqrt{R} \sum_{\vec{k} \in b} A(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-iv_c t} V_0^{(1)} \quad (2-57)$$

podemos escribir

$$\vec{v}_0 = \sqrt{R} B_1 e^{-iv_c t} V_0^{(1)} \quad (2-58)$$

donde $B_1 = B_1(X, Y, T)$ con $X = x\sqrt{R}$, $Y = y\sqrt{R}$ y $T = t\sqrt{R}$.

Ahora procedemos igual que para el caso anterior ($a=0$), con la diferencia que ahora L es

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - ia\nabla^2 + \sigma & -\sigma & 0 \\ -r_c & \frac{\partial}{\partial t} + 1 + \Omega & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} + b \end{pmatrix} \quad (2-59)$$

Pero la contribución del término proporcional al laplaciano es pequeña porque

$$\nabla^2 B_1 = R \left(\frac{\partial^2 B_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial Y^2} \right) \quad (2-60)$$

entonces, la contribución de este término aparece en el orden $R^{\frac{3}{2}}$, en la ecuación para \vec{v}_2 . Así

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + \sigma & -\sigma & 0 \\ -r_c & \frac{\partial}{\partial t} + 1 + \Omega & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} + b \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{F} e^{-iv_c t} + ia \left(\frac{\partial^2 B_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial Y^2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-iv_c t} \quad (2-61)$$

Y la condición para la existencia de la solución \vec{v}_2 ahora es

$$\frac{\partial B_1}{\partial T} \left(1 + \frac{\sigma}{r_c} x_0^2 \right) - ia \left(\frac{\partial^2 B_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial Y^2} \right) = \frac{\sigma x_0}{r_c} \left(B_1 - \frac{1}{b} B_1^2 B_1^* \right) \quad (2-62)$$

es decir B_1 satisface la ecuación compleja de Ginzburg-Landau (CGL)

$$\partial_t B_1 - \gamma \nabla^2 B_1 = \alpha B_1 - \beta B_1^2 B_1^* \quad (2-63)$$

En esta deducción hemos considerado un campo polarizado en una sola dirección por lo que se obtuvo una ecuación escalar de Ginzburg-Landau, si se considera un campo con sus dos componentes de polarización (x e y o componentes circular derecha e izquierda) de manera análoga a lo hecho se obtendrían las ecuaciones vectoriales de Ginzburg-Landau (VCGL)

$$\begin{aligned} \partial_t A_+ &= A_+ + (1+i\alpha)\nabla^2 A_+ - (1+i\beta)(|A_+|^2 + \gamma|A_-|^2)A_+ \\ \partial_t A_- &= A_- + (1+i\alpha)\nabla^2 A_- - (1+i\beta)(|A_-|^2 + \gamma|A_+|^2)A_- \end{aligned} \quad (2-64)$$

donde A_+ y A_- son las amplitudes de las componentes de polarización circular derecha e izquierda respectivamente.

3. Estabilidad de las soluciones homogéneas de la VCGLE

Analizaremos ahora la estabilidad de las soluciones homogéneas y estacionarias en módulo ($\nabla^2 A_{\pm} = 0, \frac{\partial |A_{\pm}|}{\partial t} = 0$). Para esto primero reemplazamos una solución homogénea (pero no estacionaria) de la forma $|A_{\pm}| e^{i\phi t}$ en la ecuación (2-64) y obtenemos

$$\partial_t |A_{\pm}| + |A_{\pm}| \partial_t (i\phi_{\pm}) = |A_{\pm}| - (1 + i\beta)(|A_{\pm}|^2 + \gamma |A_{\mp}|^2) |A_{\pm}| \quad (3-1)$$

luego tomamos la parte real e imaginaria de estas ecuaciones y obtenemos

$$\partial_t |A_{\pm}| = |A_{\pm}| - (|A_{\pm}|^2 + \gamma |A_{\mp}|^2) |A_{\pm}| \quad (3-2)$$

$$\partial_t \phi_{\pm} = -\beta(|A_{\pm}|^2 + \gamma |A_{\mp}|^2) \quad (3-3)$$

Es evidente entonces que la estabilidad de las soluciones de (2-64) depende de la estabilidad de las soluciones de (3-2), es decir la estabilidad depende del módulo de A_{\pm} y no de su fase.

Entonces analizaremos la estabilidad de las soluciones estacionarias y homogéneas de la ecuación (3-2). Para esto agregamos a las soluciones homogéneas una perturbación de la forma

$$|A_{\pm}| = Q_{\pm} + \delta Q_{\pm} \quad (3-4)$$

donde Q_{\pm} es la solución homogénea y estacionaria de (3-2) y δQ_{\pm} es una perturbación real.

Así obtenemos

$$\partial_t \delta Q_{\pm} = Q_{\pm} + \delta Q_{\pm} - \left[(Q_{\pm} + \delta Q_{\pm})^2 + \gamma (Q_{\mp} + \delta Q_{\mp})^2 \right] (Q_{\pm} + \delta Q_{\pm}) \quad (3-5)$$

Desarrollando esta expresión y eliminando los términos cuadráticos en δQ_{\pm} llegamos a

$$\partial_t \delta Q_{\pm} = \delta Q_{\pm} (1 - 2Q_{\pm} - Q_{\pm}^2 - \gamma Q_{\mp}^2) + \delta Q_{\mp} (-2\gamma Q_{\mp} Q_{\pm}) \quad (3-6)$$

Este sistema de ecuaciones, expresado en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} \partial_t \delta Q_+ \\ \partial_t \delta Q_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3Q_+^2 - \gamma Q_-^2 & -2\gamma Q_+ Q_- \\ -2\gamma Q_+ Q_- & 1 - 3Q_-^2 - \gamma Q_+^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta Q_+ \\ \delta Q_- \end{pmatrix} \quad (3-7)$$

Para que las soluciones sean estables, los autovalores del sistema (3-7) deben tener la parte real negativa, para que las perturbaciones decrezcan con el tiempo. Para analizar esto consideraremos tres casos:

3.1. Estabilidad para $Q_+ = 0$ y $Q_- = 0$

En este caso el sistema (3-7) queda

$$\begin{pmatrix} \partial_t \delta Q_+ \\ \partial_t \delta Q_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta Q_+ \\ \delta Q_- \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

ambos autovalores son positivos para todos los valores de γ , por lo que esta solución es siempre inestable.

De (3-3) se puede ver que para este caso $\phi_{\pm} = cte$.

3.2. Estabilidad para $Q_+ = 0$ y $Q_- \neq 0$

De (3-2) obtenemos que

$$Q_- - Q_-^3 = 0 \Rightarrow Q_- = 1 \quad (3-9)$$

El sistema (3-7) para este caso es

$$\begin{pmatrix} \partial_t \delta Q_+ \\ \partial_t \delta Q_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\gamma & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta Q_+ \\ \delta Q_- \end{pmatrix} \quad (3-10)$$

entonces la zona de estabilidad es aquella en que $\gamma > 1$. El caso en el que $Q_+ \neq 0$ y $Q_- = 0$ es análogo, y esta solución es estable en la misma región.

De (3-3) se puede ver que ϕ_+ no está definida y que $\phi_- = \phi_-^0 - \beta t$

3.3. Estabilidad para $Q_+ \neq 0$ y $Q_- \neq 0$

En este caso, de (3-2) se obtiene que

$$Q_{\pm}(1 - Q_{\pm}^2 - \gamma Q_{\mp}^2) = 0 \quad (3-11)$$

de donde se obtiene que

$$Q_+ = Q_- = \frac{1}{(\gamma+1)^{1/2}} \quad (3-12)$$

y así, el sistema de ecuaciones (3-7) queda

$$\begin{pmatrix} \partial_t \delta Q_+ \\ \partial_t \delta Q_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\gamma+1} & \frac{-2\gamma}{\gamma+1} \\ \frac{-2\gamma}{\gamma+1} & \frac{-2}{\gamma+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta Q_+ \\ \delta Q_- \end{pmatrix} \quad (3-13)$$

Los autovalores de este sistema son -2 y $-2\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$ por lo que la zona de estabilidad es $-1 < \gamma < 1$.

En este caso se obtiene de (3-3) que $\phi_- = \phi_-^0 - \beta t$ y $\phi_+ = \phi_+^0 - \beta t$

4. Defectos en la VCGLE

4.1. Definición

Los campos A_+ y A_- son campos complejos y pueden parametrizarse en la forma $|A_{\pm}|e^{i\phi_{\pm}}$. Si tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{dl} = n \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4-1)$$

donde C es un contorno cerrado sobre el cual la fase ϕ varía suavemente, es fácil ver que esto no es consistente con que la fase varíe suavemente en todo punto; si así fuese achicando suavemente el contorno, el valor de la integral debería cambiar suavemente. Como la integral toma un valor constante distinto de cero para contornos arbitrariamente pequeños, se contradice la continuidad de ϕ . Por lo tanto un valor distinto de cero de la integral (4-3) implica necesariamente la existencia de al menos un punto en el cual la hipótesis de continuidad no se cumpla. Este punto es llamado **defecto topológico** y el número n es llamado la carga del defecto. Como los campos A_{\pm} representan cantidades físicas, estos deben estar definidos en todo el espacio, por lo tanto en el defecto el modulo del campo que lo contiene debe ser cero.

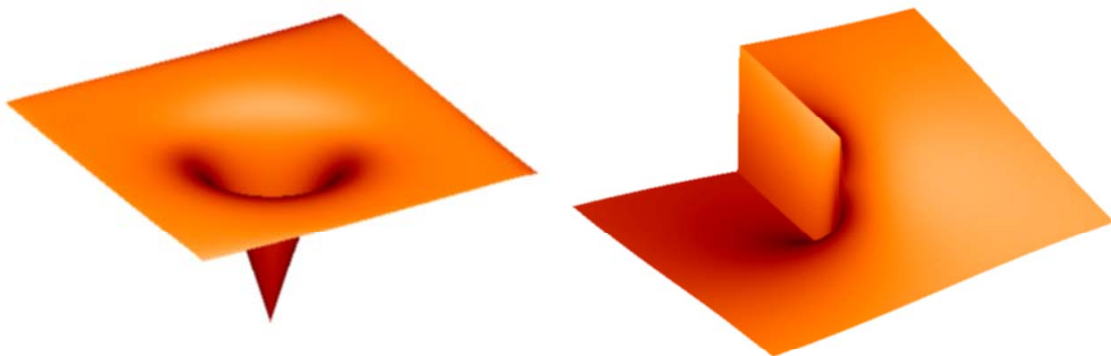


Figura 4-1: Defecto topológico. Izquierda módulo del campo. Derecha fase del campo.

4.2. Clasificación de los defectos

Vamos a realizar una clasificación de los tipos de defectos que son estables para los diferentes valores de γ . En este punto cabe aclarar que para $\gamma < -1$ no hay soluciones estables. Los defectos que pueden aparecer son mixtos, si el defecto se encuentra en uno sólo de los campos, y vectoriales si el defecto se encuentra en los dos campos. Además el background del defecto (la región lejana al defecto) puede tener distintas polarizaciones dependiendo el valor que el mismo tome para cada componente del campo.

Consideraremos dos casos:

4.2.1. Caso $\alpha = \beta = 0$

Para $-1 < \gamma < 1$, el único tipo de defecto estable es un defecto mixto con un background linealmente polarizado (ambos campos tienen el mismo valor lejos del defecto).

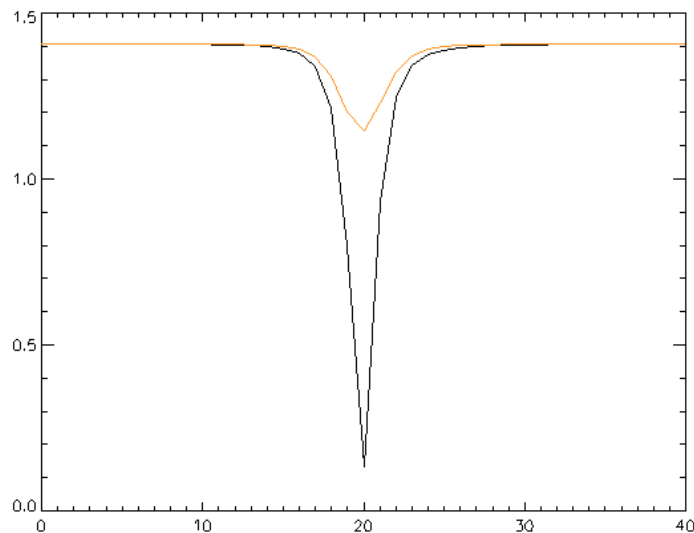


Figura 4-2. Perfil de un defecto mixto. $\gamma = -0,5$

Como se ve en la Figura 4-2 el defecto se encuentra sólo en una de las componentes del campo. En la otra componente presenta un mínimo, si $\gamma < 0$ o un máximo si $\gamma > 0$.

Para $\gamma > 1$ un tipo de defecto estable es el llamado de núcleo repolarizado (repolarized core), dicho defecto también es de tipo mixto, pero en este caso el background tiene polarización izquierda o derecha y el núcleo del defecto tiene la polarización opuesta. La altura del máximo en el campo que no posee el defecto disminuye al aumentar el valor de γ .

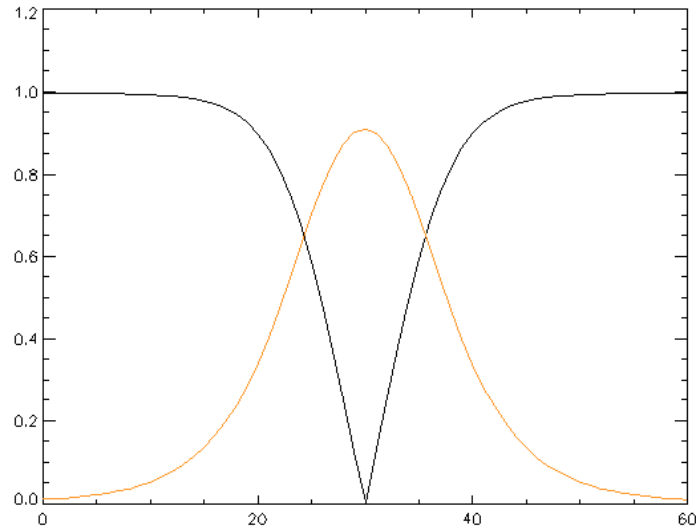


Figura 4-3. Defecto de núcleo repolarizado. $\gamma = 1,05$

Con $\gamma > 1$, aparecen además de los defectos de núcleo repolarizado, los defectos llamados de núcleo perforado (punched core), estos tienen polarización izquierda o derecha, y la componente que no posee el defecto siempre es igual a cero.

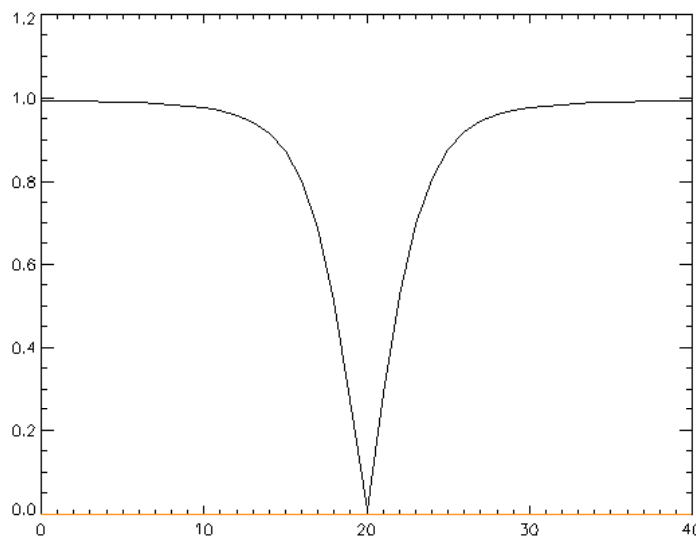


Figura 4-4. Defecto de núcleo perforado. $\gamma = 1,5$

4.2.2. Caso $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

Para $-1 < \gamma \leq 0,34$ encontramos tanto defectos mixtos como defectos vectoriales (defectos en ambas componentes del campo).

En los defectos mixtos, para $\gamma < 0$ el campo que no contiene al defecto toma un valor mínimo en el lugar donde se encuentra el cero del otro campo. Cuando γ aumenta el mínimo se hace menos profundo y para $\gamma > 0$ el mínimo se convierte en un máximo como se muestra en la Figura 4-5 (a).

Consideremos una solución del tipo de onda plana⁵:

$$A_{\pm} = Q_{\pm} e^{-i(\vec{k}_{\pm} \vec{r} - \omega_{\pm} t + \phi_{0\pm})} \quad (4-2)$$

Reemplazando esta solución en la VCGLE se obtiene que para vectores de onda con el mismo módulo, $k_{+} = k_{-} = k$, el módulo del campo es:

$$Q_{+}^2 = Q_{-}^2 = Q^2 = \frac{1-k^2}{1+\gamma} \quad (4-3)$$

En cambio, si $k_{+} \neq k_{-}$:

$$Q_{\pm} = \frac{1-\gamma + \gamma k_{\pm}^2 - k_{\mp}^2}{1-\gamma^2} \quad (4-4)$$

De este análisis de ondas planas podemos ver que los defectos mixtos pueden tener dos tipos de polarizaciones en el background. Si los defectos se encuentran en una sola componente, supongamos A_{+} , el módulo del vector de onda \vec{k}_{+} será distinto de cero, mientras que el módulo del vector de onda del otro campo será cero. Entonces de (4-4) se ve que el background tendrá polarización elíptica, es decir el background de cada componente toma un valor diferente como se ve en la Figura 4-5.

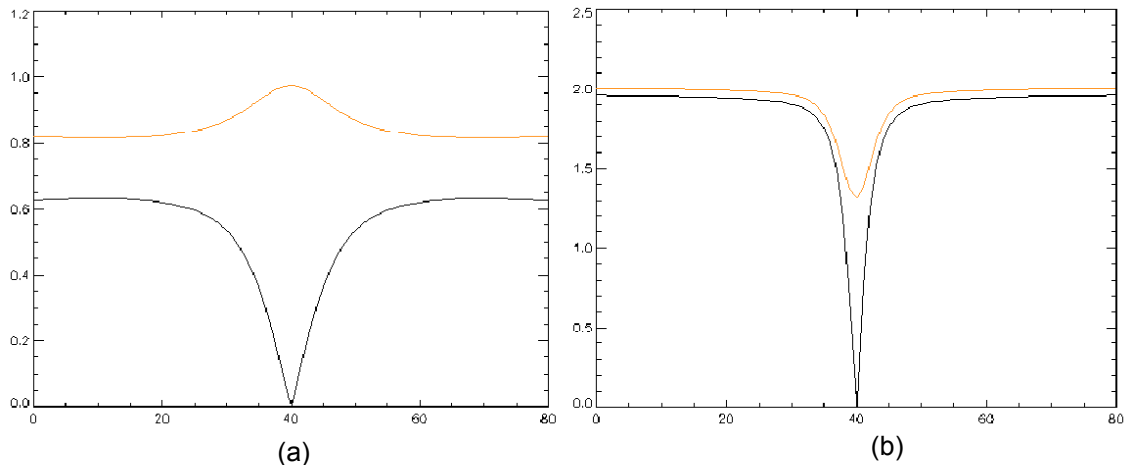


Figura 4-5. (a) Perfil de un defecto mixto en una sola componente. $\gamma=0.8$ ($\alpha=0$ $\beta=1,5$).

(b) Perfil de un defecto mixto. $\gamma=-0.8$ ($\alpha=0$ $\beta=1,5$)

En cambio, si existen defectos en las dos componentes, los vectores de onda de ambas tendrán el mismo módulo, y por lo tanto de (4-4) se ve que la polarización del background será lineal, como se muestra en la Figura 4-6

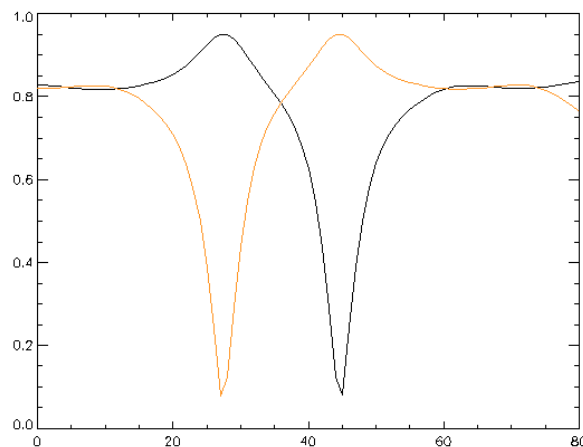


Figura 4-6. Perfil de defectos mixtos en ambas componentes del campo.

Los defectos vectoriales que aparecen pueden ser de dos tipos, dado que todos los defectos que aparecen tienen cargas $+1$ o -1 . Entonces podemos tener defectos donde ambas componentes tienen la misma carga (tipo argumento) o con cargas opuestas (tipo director) como se observa en la Figura 4-7 y Figura 4-8. Los defectos tipo argumento son fácilmente distinguibles porque su fase global $\phi_g = \phi_+ + \phi_-$ tiene la forma de una espiral de dos brazos. En el caso de los defectos tipo director la fase global forma círculos concéntricos.

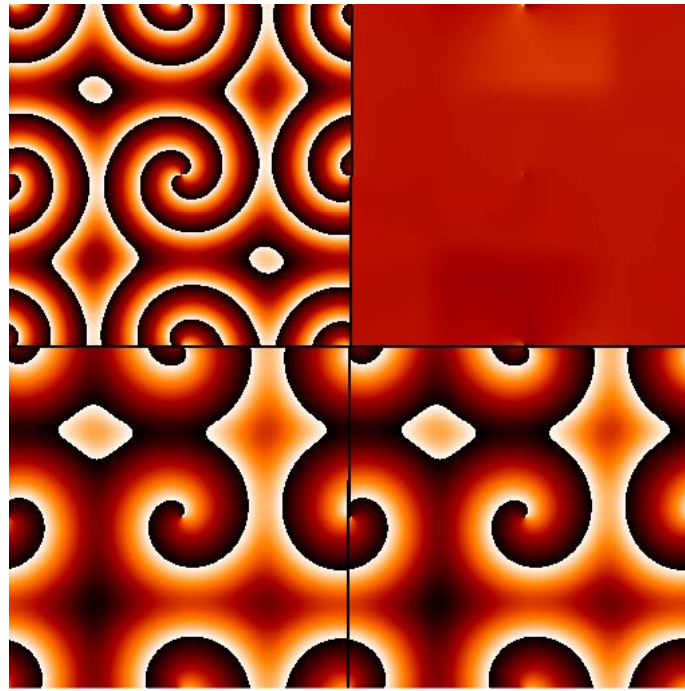


Figura 4-7. Defecto tipo argumento. De derecha a izquierda: arriba fase global $\phi_g = \phi_+ + \phi_-$, fase relativa

$$\phi_r = \phi_+ - \phi_-; \text{ abajo fase del campo } A_+ \text{ y fase del campo } A_-$$

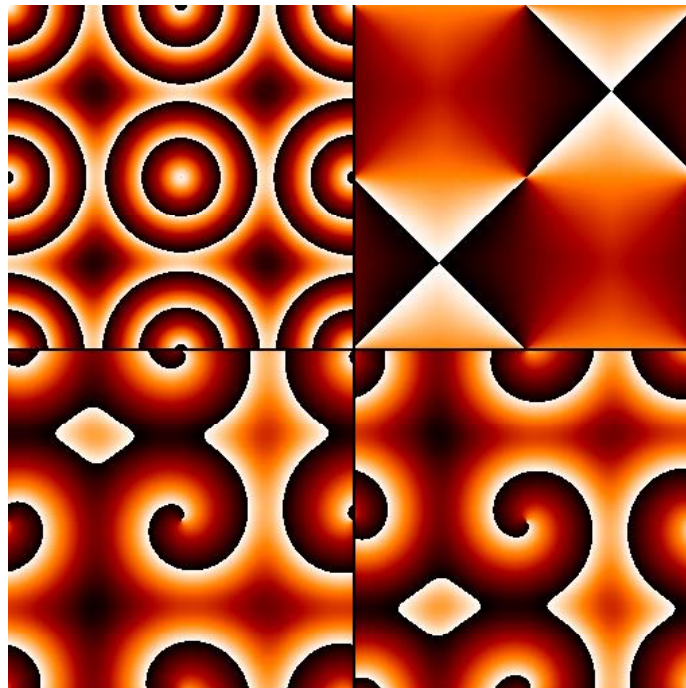


Figura 4-8. Defecto tipo director. De derecha a izquierda fase global $\phi_g = \phi_+ + \phi_-$, fase relativa $\phi_r = \phi_+ - \phi_-$,

$$\text{fase del campo } A_+ \text{ y fase del campo } A_-$$

Cuando $0,35 \lesssim \gamma < 1$ los defectos mixtos antes mencionados son estables, pero los defectos vectoriales se vuelven inestables y se convierten en defectos mixtos. Esto puede ocurrir porque un defecto vectorial se aniquila con un defecto mixto de carga opuesta, dejando un defecto mixto en la otra componente o porque un defecto vectorial se separa en dos defectos mixtos². En este caso, los defectos resultantes son defectos mixtos donde un campo es cero y el otro tiene un máximo local (núcleo repolarizado), en un background linealmente polarizado.

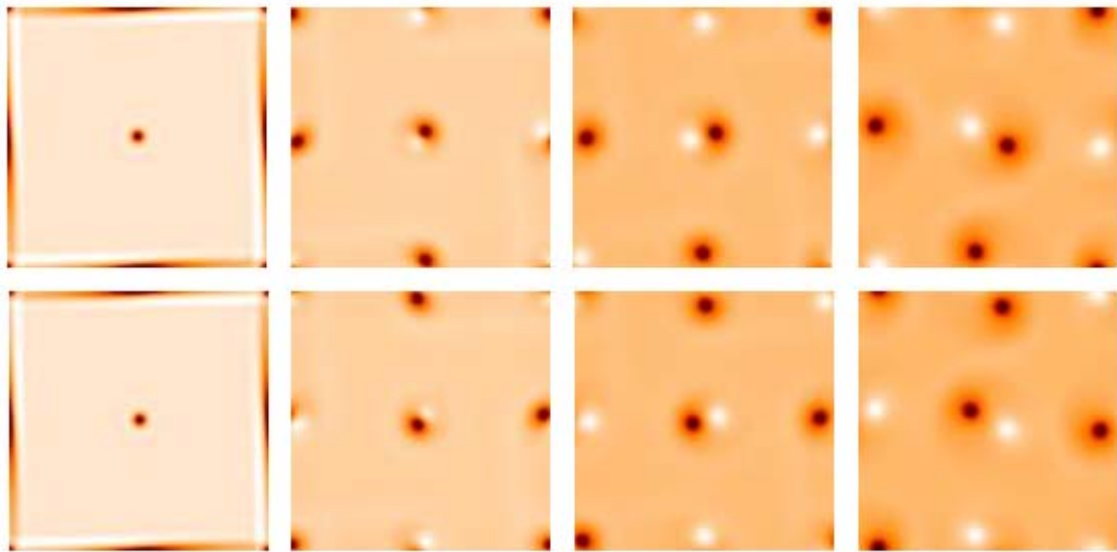


Figura 4-9. Separación de un defecto vectorial en dos defectos mixtos para $\gamma=0,5$

Arriba $|A_+|$, abajo $|A_-|$

4.3. Relación entre el tamaño de los defectos y el parámetro γ

Puede demostrarse³ que para $\gamma \rightarrow 1^+$ el tamaño de los defectos de núcleo repolarizado se comporta como $(\gamma - 1)^{-1/2}$ en VCGLE con coeficientes reales ($\alpha = 0, \beta = 0$). Aquí daremos una demostración alternativa de este resultado y encontraremos una nueva relación para $\gamma \rightarrow 1^-$. Luego extenderemos los cálculos para el caso de coeficientes complejos ($\alpha \neq 0, \beta \neq 0$). Para todos estos casos realizaremos una comprobación de los resultados mediante simulaciones numéricas.

4.3.1. Caso $\alpha = \beta = 0, \gamma \rightarrow 1^+$ ⁴

Como vimos anteriormente, para esta región de parámetros el único tipo de defecto estable es el de núcleo repolarizado. Para estudiar la relación del tamaño de este defecto con γ partimos de la VCGLE, que para coeficientes reales toma la forma:

$$\begin{aligned}\partial_t A_+ &= A_+ + \nabla^2 A_+ - (|A_+|^2 + \gamma |A_-|^2) A_+ \\ \partial_t A_- &= A_- + \nabla^2 A_- - (|A_-|^2 + \gamma |A_+|^2) A_-\end{aligned}\tag{4-5}$$

Consideramos un defecto en A_+ , ubicado en el origen. En coordenadas polares, el defecto en estado estacionario (cerca del origen) se escribe como:

$$\begin{aligned}A_+ &= \rho_+(r) e^{i\theta} \\ A_- &= \rho_-(r)\end{aligned}\tag{4-6}$$

Así, reemplazando (4-6) en (4-5) queda:

$$\frac{\partial^2 \rho_+}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_+}{\partial r} = \rho_+ \left(\frac{1}{r^2} - 1 + \rho_+^2 + \gamma \rho_-^2 \right) \quad (4-7)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_-}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_-}{\partial r} = \rho_- \left(-1 + \rho_-^2 + \gamma \rho_+^2 \right) \quad (4-8)$$

Basándonos en el perfil de un defecto (Figura 4-10), podemos escribir una aproximación para $r \rightarrow 0$, de ρ_+ y ρ_- . Esta aproximación es:

$$\begin{aligned} \rho_+ &= a.r \\ \rho_- &= \rho_0 - c.r^2 \end{aligned} \quad (4-9)$$

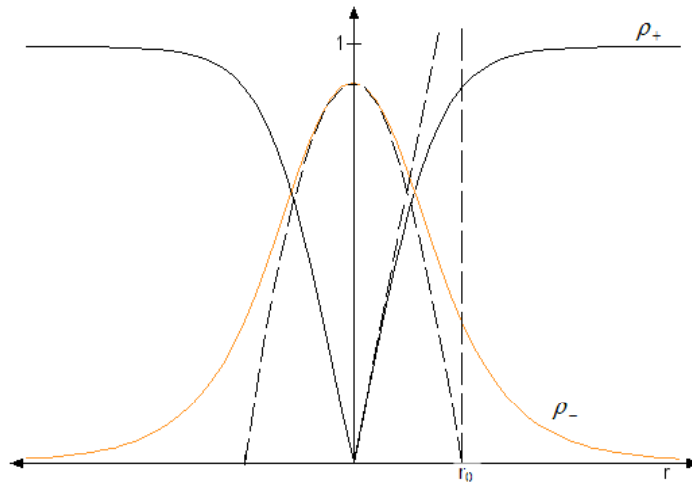


Figura 4-10. Perfil de un defecto de núcleo repolarizado (Línea continua) y aproximación cerca del origen (Línea discontinua). r_0 es el radio del defecto. $\gamma = 1,1$

De (4-9) y la Figura 4-10 podemos ver que $r_0 \approx \frac{1}{a}$ o $r_0 \approx \left(\frac{\rho_0}{c} \right)^{1/2}$ donde r_0

es el radio aproximado del defecto.

Ahora proponemos una solución para ρ_+ y ρ_- en forma de serie de potencias:

$$\rho_+ = a.r + b.r^3 + \dots \quad (4-10)$$

$$\rho_- = \rho_0 + c.r^2 + d.r^4 + \dots \quad (4-11)$$

(para ρ_+ los términos correspondientes a potencias pares se cancelan y para ρ_- se cancelan los términos de potencias impares). Luego introducimos dichas series en (4-7) y (4-8) respectivamente.

De aquí obtenemos para ρ_- a orden 0:

$$c = \frac{\rho_0(1 - \rho_0^2)}{4} \quad (4-12)$$

Además, de (4-12), vemos que:

$$r_0 \square \left(\frac{\rho_0}{c} \right)^{1/2} = \frac{2}{(1 - \rho_0^2)^{1/2}} \quad (4-13)$$

Volvamos ahora a la ecuación (4-8), y realicemos el siguiente cambio de variable: $r \rightarrow \frac{r}{|\delta\gamma|^{1/2}}$

$$|\delta\gamma| \left(\frac{\partial^2 \rho_-}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_-}{\partial r} \right) = \rho_- [-1 + \rho_-^2 + (1 + |\delta\gamma|) \rho_+^2] \quad (4-14)$$

Donde consideramos $\gamma \square 1 + |\delta\gamma|$, luego se obtiene que:

$$|\delta\gamma| \left(\frac{\partial^2 \rho_-}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_-}{\partial r} - \rho_- \rho_+^2 \right) = \rho_- (-1 + \rho_-^2 + \rho_+^2) \quad (4-15)$$

Entonces:

$$\rho_- (-1 + \rho_-^2 + \rho_+^2) = \mathcal{G}(|\delta\gamma|) \quad (4-16)$$

En particular, si $r \rightarrow 0$, $\rho_+ \rightarrow 0$ y $\rho_- \rightarrow \rho_0$, así:

$$\rho_0 (-1 + \rho_0^2) = \mathcal{G}(|\delta\gamma|) \quad (4-17)$$

Si $\delta\gamma$ es pequeño, entonces $\rho_0 \approx 1$ y (4-17) queda:

$$-1 + \rho_0^2 = \mathcal{G}(|\delta\gamma|) \quad (4-18)$$

De la ecuación (4-13) se ve que $\rho_0^2 < 1$ para que r_0 sea real, y por lo tanto se obtiene que:

$$\rho_0^2 = 1 - cte|\delta\gamma| \quad (4-19)$$

Reemplazando en (4-13), y teniendo en cuenta que $\gamma \approx 1 + |\delta\gamma|$ se ve que el tamaño de los defectos se comporta como:

$$r_0 \propto \frac{1}{(\gamma - 1)^{1/2}} \quad (4-20)$$

Para comprobar este resultado, se midió a partir de simulaciones numéricas, el tamaño de los defectos para valores de γ entre 1,2 y 1,9. En la Figura 4-11 se presenta un gráfico de $\ln(r_0)$ vs. $\ln(\gamma - 1)$ y se puede ver que el mismo se aproxima a una recta de pendiente $-1/2$, como se esperaba:

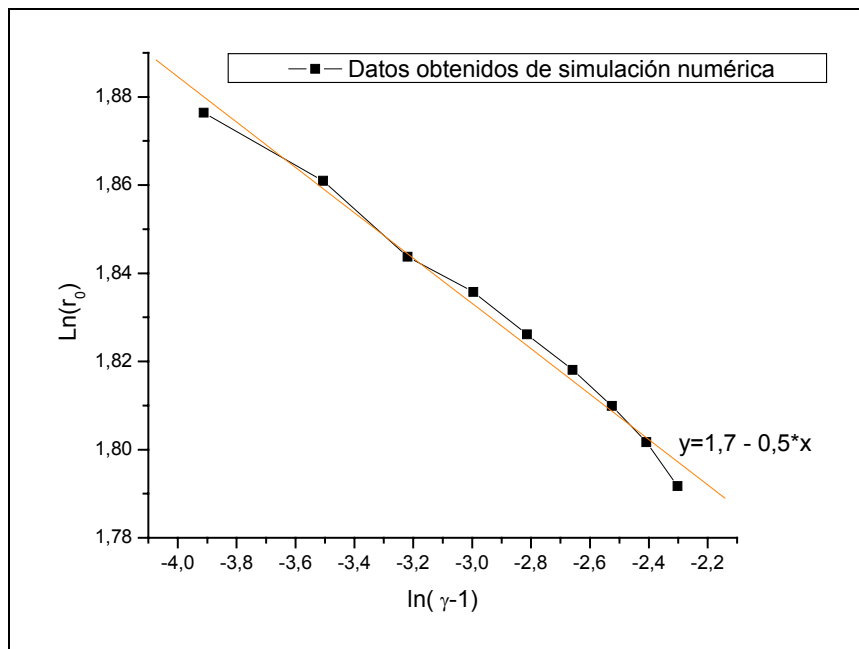


Figura 4-11. Gráfico $\ln(r_0)$ vs. $\ln(\gamma - 1)$

4.3.2. Caso $\alpha = \beta = 0, \gamma \rightarrow 1^-$

Como se señaló anteriormente, en esta región de parámetros ($\gamma < 1$) el background de los defectos es linealmente polarizado y el núcleo tiene polarización circular, por lo que la forma de los defectos cambia respecto al caso anterior. Sin embargo, como se ve en la Figura 4-12 las mismas aproximaciones siguen siendo válidas.

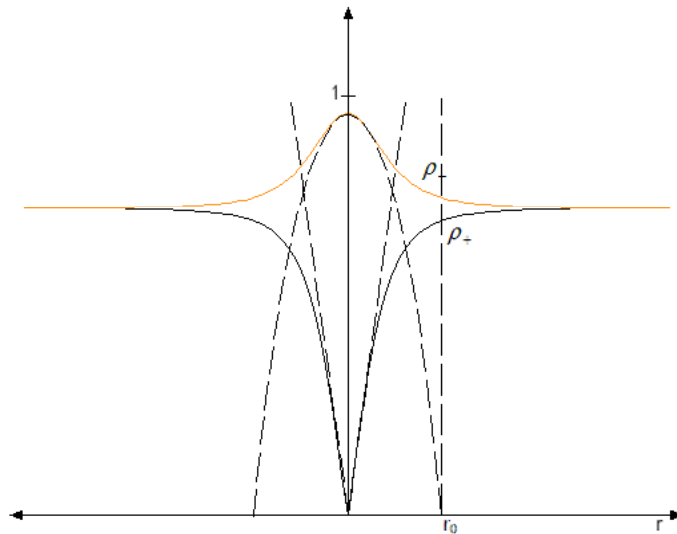


Figura 4-12. Perfil de un defecto de núcleo repolarizado (Línea continua) y aproximación cerca del origen (Línea discontinua). r_0 es el radio del defecto. $\gamma = 0,9$

El único cambio respecto al caso anterior es que en este caso $\gamma \approx 1 - |\delta\gamma|$, por lo tanto el tamaño de los defectos se comporta como:

$$r_0 \propto \frac{1}{(1-\gamma)^{1/2}} \quad (4-21)$$

Se midió a partir de simulaciones numéricas, el tamaño de los defectos para valores de γ entre 0,1 y 0,9 y tal como se puede ver en la Figura 4-13 la pendiente de la recta de $\ln(r_0)$ vs. $\ln(1-\gamma)$ es $-\frac{1}{2}$.

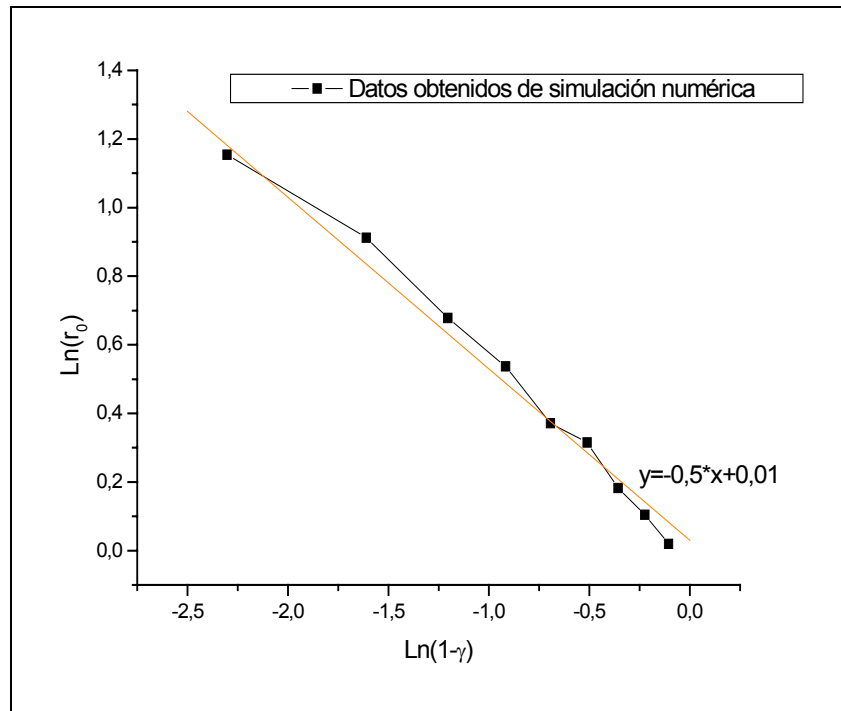


Figura 4-13 Gráfico $\ln(r_0)$ vs. $\ln(1-\gamma)$

4.3.3. Caso $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \rightarrow 1^-$

Para esta región de parámetros, como se vio en la sección 4.2.2 existen defectos mixtos con polarización elíptica en el background. Para analizar la dependencia con γ del tamaño de los defectos podemos escribirlos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A_+ &= \rho_+(r) e^{i\theta + i\omega_+ t + \varphi_+(r)} \\ A_- &= \rho_-(r) e^{i\omega_- t + \varphi_-(r)} \end{aligned} \quad (4-22)$$

De las simulaciones numéricas puede verse que para $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \rho_+(r) &= \rho_+^1 r + \dots \\
 \rho_+(r) &= \rho_-^0 + \rho_-^2 r^2 + \dots \\
 \varphi_+(r) &= \varphi_+^1 r + \dots \\
 \varphi_-(r) &= \varphi_-^0 + \varphi_-^2 r^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{4-23}$$

Donde $\rho_+^1, \rho_-^0, \rho_-^2, \varphi_+^1, \varphi_-^0, \varphi_-^2$ son coeficientes constantes a determinar. Insertamos (4-22) en (4-23) y luego reemplazamos en la VCGLE. Luego igualamos término a término.

La ecuación a primer orden para el campo A_- queda:

$$(1 - i\omega_-)\rho_-^0 + (1 + i\alpha)[4\rho_-^2 + 4i\rho_-^0\varphi_-^2] - (1 + i\beta)(\rho_-^0)^3 = 0 \tag{4-24}$$

Separando en parte real e imaginaria se obtienen dos ecuaciones independientes y tres incógnitas (ρ_-^0, ρ_-^2 y φ_-^2). Para resolver este sistema aproximamos $\rho_-^0 \approx 1 - a|\delta\gamma|$ (utilizamos la misma aproximación que para $\alpha = \beta = 0$) y utilizamos el hecho de que para este tipo de defectos⁵ $\omega_- = -\beta$.

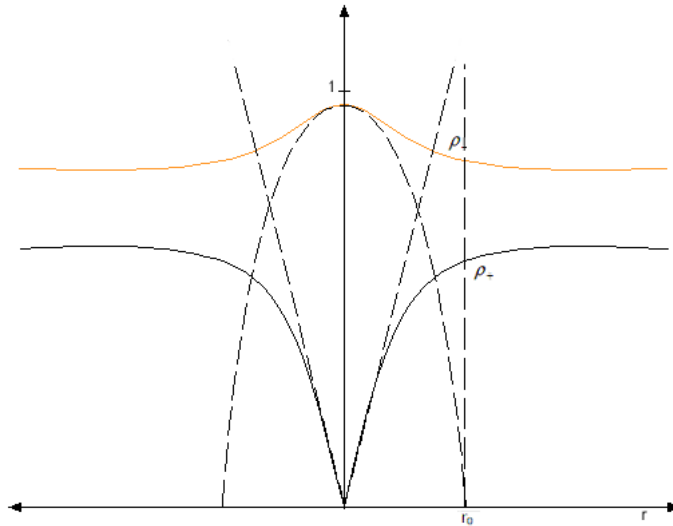


Figura 4-14. Perfil de un defecto (Línea continua) y aproximación cerca del origen (Línea discontinua). r_0 es el radio del defecto. $\gamma = 0,8$

Como en las secciones precedentes, consideramos el tamaño del defecto como $r_0 \propto \left(\frac{\rho_0}{\rho_c^2} \right)^{1/2}$. Así, con las aproximaciones consideradas el tamaño del defecto es:

$$r_0 \propto \left[\frac{2(1+\alpha^2)}{(1-\alpha\beta)} \right]^{1/2} \frac{1}{(1-\gamma)^{1/2}} \quad (4-25)$$

4.3.4. Caso $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \rightarrow 1^+$

En este caso la forma de los defectos es igual que en el caso anterior por lo que son válidas las mismas aproximaciones. Así se obtiene que el tamaño de los defectos es:

$$r_0 \propto \left[\frac{2(1+\alpha^2)}{(1-\alpha\beta)} \right]^{1/2} \frac{1}{(\gamma-1)^{1/2}} \quad (4-26)$$

4.3.5. Tamaño real de los defectos

En esta sección vamos a estimar el tamaño típico de un defecto para un sistema real. Se puede ver que el escaleo realizado a las variables espaciales durante la deducción de la VCGLE es⁶:

$$x = x' \frac{1}{\sqrt{R}} \operatorname{Re} \left(\frac{ia}{1 + \frac{\sigma}{r_c} x_0^2} \right)^{1/2} \quad (4-27)$$

donde x es la variable espacial original y x' es la variable transformada utilizada en la ecuación.

Consideraremos un láser de clase C de He-Ne, con una longitud de onda $\lambda = 3,39 \mu m$ a 5 torr⁷. Para este láser $\gamma_{12} = 2 \cdot 10^8 s^{-1}$ y $k = 2,5 \cdot 10^7 s^{-1}$. Tomaremos una desintonía $\Omega = -1$ y un parámetro $R = 0,1$.

Utilizaremos un defecto típico para $\alpha = \beta = 0$ con $\gamma = 0,5$.

Así, el tamaño del típico de un defecto es del orden de $7,6 \cdot 10^{-3}$ mts.

5. Conclusiones

Como conclusión a este trabajo comentaremos ciertos resultados experimentales relacionados con la ecuación de Ginzburg Landau en diferentes sistemas.

Como se comento anteriormente, si bien en este trabajo dedujimos la ecuación de Ginzburg Landau para un láser de dos niveles, la misma puede utilizarse para describir sistemas de diversos tipos: sistemas biológicos, físicos y químicos. Y en varios de estos sistemas aparecen defectos como los estudiados en los capítulos previos.

En sistemas ópticos^{8 9} (láseres) se han observado experimentalmente defectos como los descritos en el presente trabajo, como los que se muestran en la Figura 5-1, que corresponden a un medio fotorrefractivo (cristal BSO) excitado por un láser de argón.

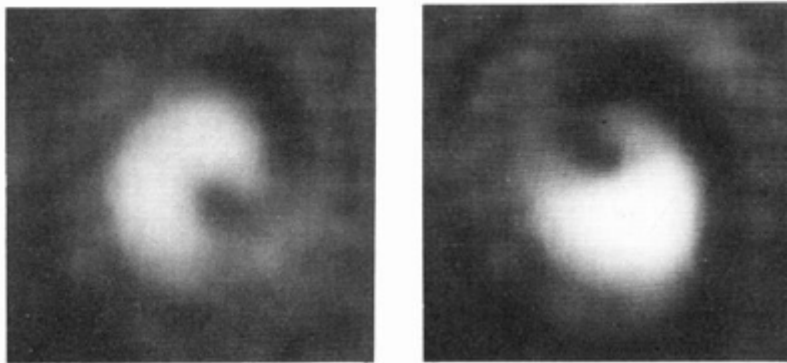


Figura 5-1. Fase de un defecto en un sistema óptico.

Otro sistema donde se observan defectos (y que esta descrito por la GLE vectorial) es el condensado de Bose-Einstein^{10 11} cuando es agitado (aquí la frecuencia de agitación es el parámetro de control), un defecto correspondiente a un condensado de ⁸⁷Rb se muestra en la Figura 5-2.

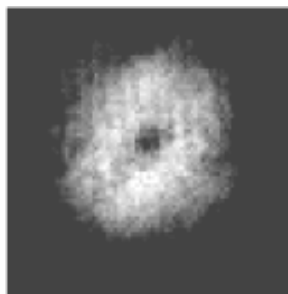


Figura 5-2. Defecto en un condensado de Bose-Einstein.

También hay sistemas químicos descritos por la GLE como la reacción de Belousov – Zhabotinsky¹² en la que aparecen espirales como las que surgen en la fase del campo alrededor de un defecto, como se muestra en la Figura 5-3.

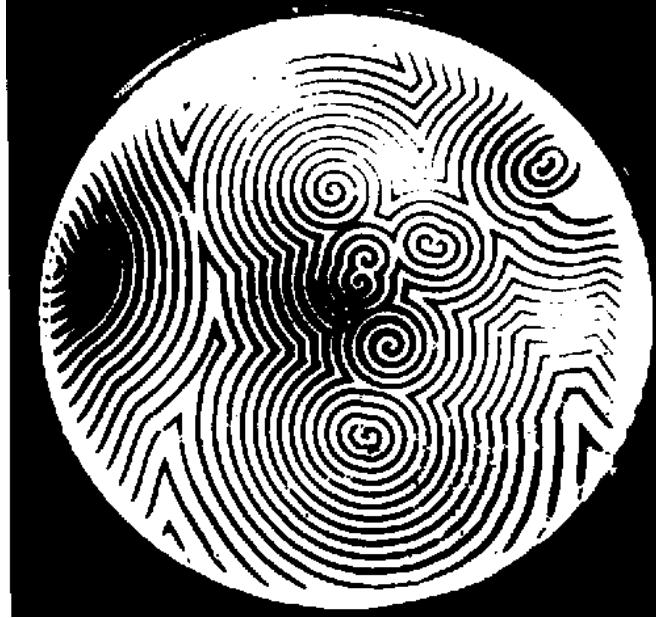


Figura 5-3. Espirales en las concentraciones químicas para la reacción de Belousov-Zhabotinsky.

Considerando los sistemas mostrados, se puede tomar una dimensión sobre la utilidad de las ecuaciones de amplitud para el estudio de sistemas fuera del equilibrio y en particular la utilidad de la GLE. Dicha utilidad y versatilidad le confiere una importancia particular al estudio de dicha ecuación.

En particular, la contribución original de este trabajo es una descripción completa del tipo de defectos que aparecen en la VCGLE, caracterizados según la región del parámetro γ en la que son estables. También se obtuvo la dependencia del tamaño de los defectos mixtos con γ , extendiendo los resultados preexistentes al caso de coeficientes complejos y comprobándolos numéricamente.

6. Agradecimientos

Agradezco principalmente a Miguel Hoyuelos por la dedicación y la paciencia que tuvo para conmigo. A Gonzalo Izus por su colaboración especialmente en las primeras etapas del trabajo. Al Dr. Hector Martin, por incluirme en su grupo de investigación.

Agradezco también a mi familia por el apoyo y por haber hecho posible que estudie y termine esta carrera y a mi novia Laura y su familia por el apoyo.

Bibliografía

-
- ¹ M.C. Cross y P.C. Hohenberg, Rev. Mod. Phys. 65, 815 (1993)
 - ² M. Hoyuelos, E. Hernández-García, P. Colet, M. San Miguel. Comp. Physics Communications 121-122 (1999) 414-419.
 - ³ L.M.Pismen. Phys. Rev. Lett. 72, 2557 (1994)
 - ⁴ Miguel Hoyuelos. Sin Publicar.
 - ⁵ M. Hoyuelos, E. Hernández-García, P. Colet, M. San Miguel. Physica D 174 (2003) 176-197.
 - ⁶ M. San Miguel, Q. Feng, J.V. Molones, A.C. Newell, Polarization Instabilities In Transverse Laser Patterns. Proceedings of the International WorkShop "Fluctuation phenomena; disorder and nonlinearity". A.Bishop, S.Jimenez and L.Vazques Eds., World Scientific Publishing Co, 413-419 (1995)
 - ⁷ L.M. Narducci, N.B. Abraham, Laser Physics and Laser Inestabilities (World Cientific, 1998)
 - ⁸ F.T. Arecchi, G. Giacomelli, P.L. Ramazza y S. Residori, Vértices and Defect Statistics in Two-Dimensional Optical Chaos. Physical Review Letters 67, 27, 3749-3752, (1991)
 - ⁹ D. Dagnoise, D. Hennequin, C. Lepers, E. Louvergneaux, P. Gloireux, Two-Dimensional Optical Latices in a CO₂ laser, Physical Review A 46, 9, 5955-5958 (1992)
 - ¹⁰ K.W. Madison, F. Chevy, W. Whohlleben, J. Dilbard, Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate, Physical Review Letters, 84,5,806-809 (2000)
 - ¹¹ K.W. Madison, F. Chevy, W. Whohlleben, J. Dilbard Interferometric Detection of a single vortex in a dilute Bose-Einstein Condensate, Physical Review A, 64 (2001)
 - ¹² L.E.Reichel. A Modern Course in Statistical Mechanics, Second Edition 735-752 (1998)