Cosmología Inflacionaria y Disipación desde un vacío pentadimensional

Autor: Jesús M. Romero
Director: Dr. Mauricio Bellini

Departamento de Física,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad Nacional de Mar del Plata,
Deán Funes 3350, (7600) Mar del Plata,
Buenos Aires, Argentina.

Junio de 2008

Agradecimientos

Este no es ni el principio ni el fin (y mis palabras son asombrosamente literales).

Es la cuarta vez que intento escribir estos agradecimientos y la indecisión no me deja seguir avanzando. Ya anoté metodicamente líneas, párrafos...y también borré cada uno de ellos, ¿Me pregunto en que orden empezar? ¿Qué decir? Algo es seguro...¡Nunca creí que esto fuera ta difícil!

Cuando uno agradece, sobre todo en un momento tan importante cómo éste, tiende a tornarse intimista y emotivo (o por lo menos a mí me pasa eso). Pero no creo que sea el tono adecuado, así que perdonen mi prosaica neurosis...pero voy a ser breve, y casi exclusivamente enumerativo. Es mucho menos de lo que debería hacer, entonces además de darles les gracias les pido disculpas.

Gracias a mi familia, a mi abuela, a mi padre, a mi madre...por estar siempre ahí, los quiero mucho.

Gracias Vero, porque tu paciencia no es infinita y por vos soy menos necio. Fuerza "amore mío".

Gracias a Ana, Gus, Jony, Pame, Piero, Vancit, Mabel y Salvador, porque también son parte de mi gente, y eso es bueno.

Gracias Mauricio, te debo las ganas con que trabajé para esta tesis (se ve que las tuyas son contagiosas)...gracias también por tu tiempo y tu generosidad, pero sin esas ganas...no habría tenido sentido.

Gracias a Dios por habernos dado este hermoso universo que describir e intentar comprender.

A mi familia, a VNB, a Adolfus...

Contents

Chapter 1

Palabras preliminares

Se puede decir que la Cosmología, en un sentido moderno, tiene su origen recién en 1916, año en que Albert Einstein presentó su Teoría General de la Relatividad[1]. Cambiando la física para siempre, al pensar en un tetra-espacio en el que el tiempo constituye, simplemente, una dimensión más. Un espacio con propiedades matemáticas claras e íntimamente ligadas a los objetos físicos, cómo masa o energía.
La Teoría General brindó, y nos brinda aún, el marco para la obtención de ecuaciones de campo con que describir la dinámica del universo.
En principio Einstein suponía que el universo debía ser homogéneo, isotrópico y estático, como muchos otros pensaban en ese momento. Sin embargo los resultados de sus ecuaciones de campo mostraban un mundo dinámico, por lo que introdujo la llamada "constante cosmológica" asociada a una energía de vacío que aportaba la estabilidad necesaria a su solución estática.
Poco después Willem de Sitter consiguió otra solución propia de un universo estático[2] y que además predecía un corrimiento al rojo sobre la radiación recibida por un observador en proporción a la distancia de la fuente. Esto sirvió para garantizar al modelo de de Sitter una rápida aceptación.
Alexander Friedmann encontró una solución diferente a las anteriores[3], con una métrica expansiva, demostrando además la naturaleza altamente inestable del universo estático de Einstein, que ante pequeñas perturbaciones terminaría expandiéndose o contrayéndose. Entonces (1927) hace su entrada a escena Abbe Georges Lamaître, físico y sacerdote que corroboró las conclusiones de Friedmann[4].
Edwin Hubble determinó, merced a cuidadosas observaciones, que las galaxias estaban alejándose unas de otras y que además su velocidad de separación era proporcional a la distancia entre ellas. Entonces Lamaître fue un poco más allá y

especuló con que, siguiendo el camino inverso a la expansión, alguna vez toda la materia y energía del universo se habría encontrado suficientemente cerca para configurar un "Átomo Primordial". Esto pareció peligrosamente creacionista a muchos de los científicos de la época que miraron recelosos a este sacerdote. "Se parece demasiado al relato bíblico" dijo Fred Hoyle, quien postulaba un universo en permanente crecimiento merced a la producción de materia que generaba nuevas galaxias al ritmo de la expansión, con una lógica que presumía de irrefutable y científicamente desprejuiciada desacreditó a Lemaitre.
George Gamow (década de 1940) amplió la idea de Lamaître proponiendo el origen universal en una partícula hipermasiva y caliente que se expandía y enfriaba[5]. Logró de este modo formular una historia térmica del universo y predecir la existencia de una radiación fósil propia del desacoplamiento materia-radiación. Además de encontrar una teoría adecuada al génesis de los elementos químicos más livianos, que predecía acertadamente sus abundancias relativas.
La disputa entre "creacionistas" y "estacionarios" se mantuvo hasta 1965, año en que Arno Penzias y Robert Wilson identificaron la radiación cósmica de fondo que el Big Bang predecía. Muy anciano, Lamaître aún vivía y tuvo el raro privilegio de verse desagraviado.
Pero el modelo estándar poseía aún muchos problemas, la radiación cósmica era demasiado uniforme respecto a la esperada para un universo aparentemente inhomogéneo. Tampoco aportaba a la comprensión de la planaridad del espacio y predecía la aparición abundante de monopolos magnéticos a altas temperaturas.

Entonces llegó Inflación [6].

La pequeña introducción histórica presentada pretende servir de andamiaje estructural y disparador de la construcción de este trabajo organizado en seis capítulos de los que éste es el primero. Cada sección cuenta asimismo, con una introducción propia y algunos elementos asociados a la evolución histórica de la cosmología moderna.
El segundo capítulo trata en principio sobre el marco indispensable para el desarrollo de cualquier teoría cosmológica, la Teoría General de la Relatividad. Aborda también el Modelo Estándar y las características propias del escenario cosmológico actual.
El tercer capítulo se refiere a conceptos básicos sobre Inflación e Inflación Tibia.
El cuarto capítulo introduce las teorías de dimensiones extra, refiriéndonos sobre todo a Kaluza-Klein y Materia Inducida.
El quinto capítulo trata, partiendo desde un vacío 5D, el problema de disipación en la dinámica 4D efectiva. Ajustándose al marco de Materia Inducida y posteriormente a Inflación Tibia.

Para finalizar se efectúa un recuento de los resultados de cada capítulo y las conclusiones generales del trabajo.

Cabe remarcar que las observaciones han logrado un alto grado de precisión en los útimos años. Aportando constantemente nuevos datos y convirtiendo el tema en un terreno dinámico. Aún así la solidéz del modelo inflacionario lo posiciona como el fundamento más claro para las formulaciones cosmológicas. De cara a este nuevo tiempo en que mucho hay por ver y en que se esperan nuevos elementos para poner a prueba modelos cada vez más realistas.

Chapter 2

Relatividad General

2.1 Introducción

Los modelos cosmológicos modernos (cómo aquellos asociados a teorías de branas, Kaluza-Klein y otras formulaciones sobre dimensiones extra) basan su formalismo en la Teoría General de la Relatividad (TGR), que resulta entonces una herramienta indispensable para el desarrollo de la cosmología.
La TGR es básicamente un modelo en que la gravedad se manifiesta como la curvatura del espacio-tiempo debida a la presencia de grandes masas. La teoría tiene un fuerte contenido geométrico, dándole suma importancia a la estructura del tetra-espacio, que se manifiesta cómo una Variedad Riemanniana analítica dotada de una métrica lorentziana[7].

2.2 Elementos de Relatividad General

La métrica se representa en gravitación por un tensor simétrico de segundo orden cuyas componentes covariantes en el sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ se denotan por $g_{\mu\nu}$. El tensor fundamental tiene a priori una dependencia punto a punto, cumple con $det(g) \neq 0$ y admite derivadas parciales continuas hasta cierto orden, llamado clase del espacio. El diferencial de longitud de espacio-tiempo viene dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu. \tag{2.1}$$

Ante una transformación de coordenadas $x^\mu \longrightarrow \tilde{x}^\mu$, el tensor métrico, al igual que cualquier otro tensor de segundo orden, cumple con la siguiente regla de transformación

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \tilde{x}^{\nu}} \, g_{\rho\sigma}. \tag{2.2}$$

Puede definirse una derivada covariante, que denotamos por ";", y tiene la propiedad de aumentar en uno el orden tensorial covariante. La acción efectuada sobre un tensor mixto de segundo orden viene dada por

$$T^{\mu}_{\nu;\lambda} = T^{\mu}_{\nu,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma} T^{\sigma}_{\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} T^{\mu}_{\sigma}, \tag{2.3}$$

siendo $\Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}$ las conexiones afines definidas sobre el espacio [8], y donde notamos con "," a la derivada ordinaria.

Puede demostrarse que todo espacio de Riemann es un espacio de conexión afín simétrica cuyos coeficientes vienen dados por los llamados símbolos de Christoffel de segunda especie, cuya expresión es

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(g_{\sigma\nu,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma} \right), \tag{2.4}$$

donde $g^{\mu\nu}$ corresponde a las componentes contravariantes del tensor métrico, que satisfacen $\left[g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} \right]$. Además vale aclarar que los símbolos de Christoffel no cumplen con las leyes de transformación propias de los tensores.

La curvatura del espacio-tiempo es determinada por el Tensor de Riemann

$$R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} \Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}. \tag{2.5}$$

En un espacio de Riemann sólo es posible obtener por contracción del tensor de curvatura un único tensor no nulo, el de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\nu\sigma} = -R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}, \tag{2.6}$$

$$R^{\sigma}_{\sigma\mu\nu} = 0. \tag{2.7}$$

A su vez mediante el tensor de Ricci se define la curvatura escalar, dada por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

Las Ecuaciones de Einstein relacionan la naturaleza geométrica del espacio-tiempo con la materia en el mismo. La geometría aparece en el tensor de Einstein, definido a patir de $R_{\mu\nu}$ y R, estando determinado entonces desde la métrica

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \tag{2.9}$$

que es simétrico y cumple la siguiente relación para su divergencia

$$G^{\mu\nu}_{\ ;\mu} = G^{\mu\nu}_{\ ;\nu} = 0. \tag{2.10}$$

La materia, o bien "la parte física" de las ecuaciones, se incorpora a través de un tensor de energía-momento, cuyas componentes son $T_{\mu\nu}$ en su forma dos veces covariante. Las Ecuaciones de Einstein entonces son

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{2.11}$$

Dichas ecuaciones pueden obtenerse a través del principio de mínima acción anulando las variaciones de $\left[I = \frac{-1}{16\pi G} \int dx^4 \sqrt{-g} R + \int dx^4 \sqrt{-g} L \right]$, donde el primer término corresponde a la acción gravitatoria y el segundo a la acción física.
El tensor energía-momento satisface $[\, T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0 \,]$, lo que es una extensión al espacio-tiempo curvo de las leyes usuales de conservación de energía-momento, esto implica la necesidad de (2.10).
En la TGR, el concepto euclidiano de línea recta encuentra su extensión a través de las geodésicas [7], que son definidas como las curvas extremales del funcional de longitud. De esto resulta la llamada Ecuación de Geodésicas

$$\frac{dU^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} U^\lambda U^\nu = 0, \tag{2.12}$$

donde $\left[U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \right]$ es la tetravelocidad asociada a la coordenada μ. Esta expresión es la extensión de la segunda ley de Newton en ausencia de fuerzas no gravitatorias, aunque es posible introducir tales fuerzas agregando los términos apropiados al lado derecho de la ecuación.
La ecuación se aplica tanto a partículas masivas como no masivas. En el primer caso normalmente se utiliza como parámetro de la curva al tiempo propio, de manera que $[\, g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 1 \,]$ define la naturaleza hiperbólica de la variedad e implica que las tetravelocidades resultan ser vectores de tipo tiempo.
Para partículas no masivas, en especial fotones $[\, g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0 \,]$, nos habla de una relación de tipo luz.

2.3 Elementos de cosmología estándar

El modelo cosmológico estándar tiene su fundamento en las ecuaciones de Einstein asociadas a un gas ideal y en el principio cosmológico[9]. El principio sostiene que el universo es espacialmente homogéneo e isótropo a escalas suficientemente grandes. Esto resulta muy restrictivo, y las únicas métricas compatibles con ello son las de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), cuya forma es

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + sen^2(\theta)\,d\phi^2\right)\right], \tag{2.13}$$

donde k es la curvatura espacial, que es un número real cuyo valor puede ser reescaleado de modo que $[\,k = -1, 0, 1\,]$, lo que corresponde a una geometría abierta, plana y cerrada, respectivamente. La materia en el universo se describe mediante el tensor

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\,U_\mu U_\nu + p\,g_{\mu\nu}. \tag{2.14}$$

En el caso de utilizar la signatura inversa a la aquí adoptada debe modificarse la expresión cambiando el signo del último término.
Es de gran importancia definir cuales son los observadores que efectuarán las mediciones de las diferentes cantidades físicas involucradas en el modelo. Esto es equivalente a fijar un sistema de referencia desde el cual describir el universo. En cosmología generalmente se opta por la clase de observadores en reposo respecto de la expansión del universo, es decir aquellos cuyas coordenadas espaciales permanecen constantes en el tiempo, pero que a su vez cumplen la ecuación de geodésicas (2.12).
Empleando la métrica FRW (2.13) en las ecuaciones de Einstein (2.11) asociadas al tensor de energía-impulso de gas ideal (2.14), obtenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3\pi}\rho - \frac{k}{a^2}, \tag{2.15}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3p\right), \tag{2.16}$$

que son las ecuaciones de Friedmann-Lemaitre para una constante cosmológica nula. Éstas determinan la dinámica del universo, y una de sus consecuencias inmediatas es la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + p\right) = 0, \tag{2.17}$$

en la que $\left[\,H = \frac{\dot{a}}{a}\,\right]$ es el parámetro de Hubble. La ecuación de continuidad es equivalente a la de conservación de energía.
De (2.15) podemos decir que el universo debe expandirse o contraerse según el

valor de la constante de curvatura espacial. Si $k = 1$ el universo colapsará a tiempo finito, mientras que para $k = 0, -1$ se expandirá indefinidamente. Estas conclusiones se ven alteradas cuando $\Lambda \neq 0$.
La "constante cosmológica" Λ recibe este nombre por razones históricas, aunque no sea necesariamente una constante. Las ecuaciones de Einstein (2.11) pueden reescribirse

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.18}$$

donde $\Lambda g_{\mu\nu}$ proviene de la libertad que da la condición (2.10) para sumar al tensor de Einstein un término de divergencia nula. También puede interpretarse como un tensor de energía-momento de vacío $\left[T^{(vac)}_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{8\pi G} \right]$. Las ecuaciones (2.18) pueden obtenerse a mediante la aplicación del principio de mínima acción, de modo análogo a (2.11), a través de la variación de
$\left[I = \frac{-1}{16\pi G} \int dx^4 \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda) + \int dx^4 \sqrt{-g} L \right]$. La ecuación de continuidad (2.17) mantiene su validez.
La presión y densidad de energía pueden relacionarse en una ecuación de estado a través de un factor $\omega = \omega(t)$, que puede ser considerado constante a escalas adecuadas

$$p = \omega\rho, \tag{2.19}$$

esta ecuación describe el caso de un universo constituído por un gas de partículas relativistas cando $\omega = \frac{1}{3}$, y también el caso en que domina la materia no relativista, mediante $\omega = 0$. Que son las dos configuraciones más importantes para el viejo modelo estándar que prescindía en principio de la energía de vacío. En ambos casos la ecuación de continuidad (2.17) puede integrarse para dar

$$\rho \sim a^{-3(1+\omega)}. \tag{2.20}$$

Sustituyendo en (2.15), cuando $\Lambda = 0$ y $k = 0$ obtenemos

$$3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G\rho_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega)}, \tag{2.21}$$

donde el subíndice "0" rotula cantidades referidas al tiempo actual. De aquí se obtiene la evolución del factor de escala

$$\dot{a}^2 \sim a^{2-3(1+\omega)}. \tag{2.22}$$

Así, para un universo dominado por radiación se tiene que

$$a_{rad}(t) \sim t^{\frac{1}{2}}, \tag{2.23}$$

y para un universo dominado por materia no relativista

$$a_{mat}(t) \sim t^{\frac{2}{3}}, \tag{2.24}$$

lo que diferencia las tasas de expansión en universos dominados por una u otra configuración.

Si la componente dominante corresponde a una fuente de energía de vacío V_0, ésta debe actuar cómo una constante cosmológica con $\Lambda = 8\pi G V_0$ y una ecuación de estado con $\omega = -1$. En este caso la solución de (2.15) genera una expansión exponencial dada por

$$a_{vac}(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \tag{2.25}$$

Una forma de cuantificar la rapidez de la expansión es a través del parámetro de desaceleración q(t), definido por

$$q(t) = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \tag{2.26}$$

de modo que si $q < 0$ el universo se encuentra en una etapa de expansión acelerada. También podemos obtener una medida de la cantidad de materia contenida, definiendo a partir de (2.15) una densidad crítica ρ_c, como aquella que corresponde a un universo con geometría espacialmente plana

$$\rho_c(t) = \frac{3}{8\pi G} H^2(t). \tag{2.27}$$

Aquí podemos definir un parámetro de densidad

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}, \tag{2.28}$$

que tomando en cuenta la ecuación de Friedmann (2.15), en presencia de una constante cosmológica no nula, nos conduce a

$$\Omega - 1 + \frac{\Lambda}{3H^2} = \frac{k}{a^2 H^2}. \tag{2.29}$$

Esta ecuación indica una relación directa entre cantidad de materia y curvatura espacial. En el caso en que $\Lambda = 0$ vemos que

$$\Omega < 1 \longrightarrow k = -1, \tag{2.30}$$

$$\Omega = 1 \longrightarrow k = 0, \tag{2.31}$$

$$\Omega > 1 \longrightarrow k = 1, \tag{2.32}$$

donde los valores de k han sido reescaleados y corresponden respectivamente a un universo abierto, plano o cerrado.
En general es necesario distinguir entre las diferentes contribuciones a la densidad de energía total. Por esto se definen los parámetros asociados a materia, radiación y vacío actuales, de modo que (2.29) debe reescribirse

$$\frac{k^2}{a_0^2 H_0^2} = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_v - 1, \tag{2.33}$$

donde $\left[\Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda(t)}{3H^2(t)} \right]$ y Ω_v es su valor actual.

2.4 Evidencia experimental y realismo cosmológico

La cosmología observacional se ha desarrollado enormemente en los últimos años, por ejemplo a través del seguimiento de fenómenos relacionados con la formación de estructura a gran escala. Particularmente en la distribución de galaxias y en supernovas con altos corrimientos al rojo. Asimismo la observación de las anisotropías en la radiación cósmica de fondo y del espectro de potencias de las perturbaciones primordiales de densidad, a partir de la superficie de determinadas galaxias, han resultado en una estimación muy precisa de los parámetros cosmológicos actuales. De este modo es posible obtener un escenario cada vez más completo y realista, como nuevo marco de referencia en que desarrollar los modelos cosmológicos modernos.
Presentaremos en esta sección una síntesis de la realidad cosmológica actual a través de algunos importantes conceptos, planteando las características del escenario cosmológico soportado por las evidencias experimentales.

2.4.1 Corrimiento al rojo

Las propiedades del universo han sido estudiadas desde hace años a partir de la espectroscopía de la radiación proviniente de las estrellas. Se ha comprobado

que los espectros de aquellas situadas fuera de nuestra galaxia presentan los mismos conjuntos característicos de frecuencias ausentes que en los casos correspondientes a las estrellas de nuestra galaxia, pero desplazados hacia el extremo infrarrojo del espectro.
El parámetro que mide el corrimiento es

$$z = \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0}, \tag{2.34}$$

donde ν_0 es la frecuencia medida en la Tierra y ν_e la frecuencia emitida por la fuente.
Edwin Hubble, basándose en observaciones que acreditaban el aumento del corrimiento en relación a la distancia entre la fuente y la Tierra, sugirió una relación lineal entre distancia y corrimiento, dada según

$$z \simeq Hr, \tag{2.35}$$

donde H es el parámetro de Hubble.
En el marco de la TGR podemos decir que la luz viaja a través del espacio sobre geodésicas nulas. Consideraremos dos señales emitidas desde una fuente localizada. La primera de ellas parte del punto (t_e, r_e) y es captada en $(t_0, 0)$, la segunda se origina en $(t_e + \delta t_e, r_e)$ y es recibida en $(t_0 + \delta t_0, 0)$. A su vez el observador percibe los haces luminosos desde el centro de coordenadas, y los ve por tanto precipitándose radialmente hacia él. Utilizando estos datos, y el hecho de que el universo es descripto por una métrica FRW (2.13), podemos integrar para las geodésicas de ambas señales y obtenemos para la primera de ellas

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \tag{2.36}$$

y para la segunda

$$\int_{t_e+\delta t_e}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \tag{2.37}$$

Restando (2.36) y (2.37), bajo la presunción de que $a(t)$ ha variado muy poco entre ambas emisiones, se tiene que

$$\frac{\delta t_0}{\delta t_e} = \frac{a_0}{a_e}, \tag{2.38}$$

y por lo tanto

$$1 + z = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a_0}{a_e}. \tag{2.39}$$

Esto implica un tipo de corrimiento Doppler propio de la estructura de las métricas FRW y asociado a la expansión misma del universo, más allá de cualquier movimiento de la fuente.
Mediante la observación de diversos objetos, su distancia y corrimiento al rojo se ha logrado estimar el valor actual de distintos parámetros.

2.4.2 Radiación cósmica de fondo

En principio el universo habría sido demasiado caliente (con una temperatura del orden de $1MeV$), para que se diera siquiera la formación de núcleos atómicos. Con el paso del tiempo, mediando una asimetría entre bariones y antibariones que evitó su completa aniquilación, la disminución de la temperatura permitió que los valores de la energía cinética de partículas como protones y neutrones fueran adecuados para la nucleogénesis.
Aún así los bariones existían sólo en forma de plasma, y debieron transcurrir unos 300.000 años para que la temperatura permitiera la recombinación. Proceso en el cual los protones logran atrapar electrones libres y engendrar los primeros átomos de hidrógeno.

Hasta esta época el universo fue opaco a la radiación, debido a la dispersión de los fotones por los electrones libres. Tras la recombinación la densidad de electrones libres disminuyó lo suficiente para generar el desacoplamiento entre materia y radiación. Esto se ve hoy día como un fondo cósmico de microondas, que fue generado por fotones fósiles al interactuar finalmente con la materia.
La radiación cósmica de fondo representa un evidencia observacional preponderante para la medida de parámetros cosmológicos y el estudio de modelos. La radiación fósil es fuertemente isotrópica, hecho que el viejo modelo estándar no podía explicar.

2.4.3 Escenario cosmológico actual

En definitiva el escenario realista soportado por los datos observacionales debe contar con una serie de ingredientes específicos[10].

• La cosmología homogénea e isotrópica, con un universo en expansión desde una fase inicial caliente y regulada por las ecuaciones de Friedmann-Lemaitre obtenidas en el marco de la TGR.

- Las secciones espaciales del espacio-tiempo son muy cercanas a una geometría plana. El valor estimado actual del parámetro Ω se encuentra dado por $[\,-0.3 \leq \Omega - 1 \leq 0.1\,]$.

- Hay generación de perturbaciones primordiales de densidad en una época inflacionaria. Con un espectro de potencia cuyo índice tiene un valor $n = 0.98 \pm 0.02$, cercano a la invariancia de escala. EL impacto de las perturbaciones en las anisotropías de la radiación cósmica de fondo indica correlación a escalas superiores al horizonte causal.

- La evolución de las perturbaciones de densidad sujetas a la inestabilidad gravitacional ha generado la estructura a gran escala del universo.

Chapter 3

Ideas básicas sobre Inflación e Inflación Tibia

3.1 Introducción

Esta sección no pretende dar una detallada evolución y desarrollo de los modelos cosmológicos inflacionarios sino apenas una breve introducción histórica, y posteriormente una síntesis de su formalismo y estructura matemática con el objetivo de motivar el trabajo desarrollado en los capítulos siguientes.

El primer modelo inflacionario realista se debe a Alexey Starobinsky (1979) que propuso la expansión acelerada del universo desde un cierto estado inicial[11]. Esto durante un período en que el universo habría incrementado su factor de escala en una cantidad abrumadoramente superior a la correspondiente al modelo estándar.
Sin embargo no fue clara la interpretación de aquel estado inicial del universo, sino hasta la sugerencia de Yakob Zel'dovich que lo asociaba a un estado de vacío[12]. Esta idea no fue tan bienvenida en principio, pero ha ido ganando gran aceptación hasta la actualidad. El trabajo de Starobinsky fundado en la gravedad cuántica y producido en la aislada URSS no conoció difusión, por lo que la formulación debida a Alan Guth (1981), que además resultaba más sencilla, fue adoptada rápidamente en Occidente. La propuesta de Guth[13] se fundaba en que el universo se habría expandido inicialmente desde un estado con una temperatura T mayor a cierta T_c, con φ un campo escalar responsable de la expansión, el llamado Inflatón. Tal estado $\varphi(T) = 0$ sería un mínimo local del potencial efectivo $V(\varphi, T)$ por lo que el universo habría permanecido en ese estado de pseudo-vacío durante un largo tiempo con un tensor de energía-momento

$T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} V(0)$. La expansión sería exponencial, produciendo la planaridad. El decaimiento desde el estado localmente estable provocaría la formación de "burbujas" para las que $\varphi = \varphi_0$ (asociado a un mínimo del potencial $V(\varphi_0)$). La colisión entre las paredes de las burbujas provocaría el recalentamiento del universo, pero además una fuerte inhomogeneidad. Este problema convierte a la llamada Inflación Vieja, en un modelo inadecuado puesto que la evidencia observacional nos habla de gran homogeneidad a escalas cosmológicas.
La Inflación Nueva de Andrei Linde (1982) viene a tratar de solucionar este problema a través de una transición de fase de segundo orden desde un falso vacío, más suave y que igualmente resolvía el problema de planaridad [14]. Pero predecía variaciones demasiado importantes para la Radiación Cósmica de Fondo.
Poco tiempo después el propio Linde propuso un nuevo formalismo, el de la Inflación Caótica [15]. Éste predice una evolución exponencial para los primeros instantes del universo, caracterizada a través de una energía dominada por el potencial $V(\varphi)$ asociado a un campo escalar φ. La rápida expansión produce la homogeneidad, planaridad e isotropía del universo, que hoy observamos. Tras esto da lugar a un período de recalentamiento debido a la transformación de la energía potencial en energía térmica. Posteriormente la evolución del universo sería tratable mediante el Modelo Estándar.
Actualmente hay varios modelos que coinciden con las observaciones experimentales. Éstos en general asocian la formación de estructura en el universo a las fluctuaciones cuánticas del campo escalar, a través del derrame de modos fuera del horizonte observable.

3.2 Inflación

3.2.1 Formalismo

Podemos partir de una lagrangiana

$$\mathcal{L}(\varphi, \varphi_{,\mu}) = -\sqrt{|g|}\left(\frac{\mathcal{R}}{16\pi G} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} + V(\varphi)\right), \tag{3.1}$$

cuando el campo escalar φ aparece como mínimamente acoplado a la gravedad [16].
Debido a la solidéz del modelo de Inflación Caótica, que exige una transición de fase de segundo orden, se trata en general con un potencial $V(\varphi)$ muy plano, esto es $\left[\frac{d^2V(\varphi)}{d\varphi^2} \ll {M_p}^2\right]$, donde M_p es la masa de Planck. Dado que el proceso de inflación es de tipo clásico esto impone que $\left[V(\varphi) \lesssim {M_p}^4\right]$. El proceso de

inflación termina cuando φ se encuentra muy próximo al mínimo ansoluto del potencial y comienza el recalentamiento.
La métrica adecuada para representar la geometría suavizada por la acelerada expasión es una FRW

$$dS^2 = dt^2 - a^2(t)\, d\vec{r}^{\,2}. \tag{3.2}$$

Claramente, $\left[g = -a^6\right]$. Además puede calcularse que la curvatura escalar es $\left[\mathcal{R} = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\right]$.
Aplicando las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}}\right) = 0, \tag{3.3}$$

obtenemos la ecuación de movimiento para el campo escalar cuántico φ

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2 \varphi}{a^2} + V'(\varphi) = 0, \tag{3.4}$$

donde $\left[V'(\varphi) = \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi}\right]$. La ecuación es operatorial, y además no-lineal (salvo en el caso en que $V(\varphi)$ sea cuadrático) debido a la libertad para la forma que puede adoptar $V(\varphi)$. Lo que la hace en general muy complicada o irresoluble. Por ello se trabaja comunmente con una aproximación.

3.2.2 Aproximación semi-clásica

Supongamos que podemos escribir

$$\varphi(t, \vec{r}) = \phi_c(t) + \phi_q(t, \vec{r}), \tag{3.5}$$

donde ϕ_c representa una parte clásica, asociada a la métrica de fondo y por ende independiente de $\vec{r}$, y ϕ_q, en cambio, representa pequeñas fluctuaciones cuánticas. Pedimos algunas propiedades razonables

$$\phi_c(t) =< 0\,|\varphi(t, \vec{r})|\,0 >, \tag{3.6}$$

entonces tenemos

$$(3.7) \qquad < 0\,|\phi_q(t,\vec{r})|\,0 >=< 0\,|\varphi(t,\vec{r})|\,0 > -\phi_c(t) = 0.$$

Además vamos a necesitar, cosa que justificaremos luego, que

$$(3.8) \qquad < 0\,|\dot{\phi}_q(t,\vec{r})|\,0 >= 0.$$

Empleando todo esto en (3.4) resulta

$$(3.9) \qquad \ddot{\phi}_c + \ddot{\phi}_q + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\phi}_c + \dot{\phi}_q\right) - \frac{1}{a^2}\nabla^2{}_r(\phi_q) + V'(\varphi) = 0,$$

expresión en la que utilizamos el hecho de que $\nabla^2{}_r(\phi_c) = 0$, pues sólo tiene dependencia temporal.
Desarrollando ahora $V'(\varphi)$ a orden uno en torno a ϕ_c, y recordando (3.8), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$(3.10) \qquad \ddot{\phi}_c + 3H_c\dot{\phi}_c + V'(\phi_c) = 0,$$

$$(3.11) \qquad H^2{}_c(t) = \frac{8\pi G}{3} < \frac{\dot{\phi}_c^2}{2} + V(\phi_c) >,$$

$$(3.12) \qquad \ddot{\phi}_q + 3H_c\dot{\phi}_q - \frac{1}{a^2}\nabla^2{}_r\phi_q + V''(\phi_c)\phi_q = 0,$$

donde (3.10) y (3.11) describen la parte clásica de la dinámica. La expresión (3.12) hace lo propio con las pequeñas fluctuaciones cuánticas a escala cosmológica, en el rango en que $\frac{\dot{a}}{a} \cong H_c$.

3.2.3 Dinámica clásica

Para tratar la dinámica de la parte cásica del potencial comencemos derivando la ecuación (3.11), y reemplazando la expresión de $\ddot{\phi}_c$ por la que se deduce de (3.10), se obtiene

$$(3.13) \qquad \dot{H}_c = -4\pi G\dot{\phi}_c^2,$$

donde se ha utilizado que $\left[\dot{V}(\phi_c) = V'(\phi_c)\,\dot{\phi}_c\right]$. Sabiendo que $\left[\dot{H}_c(\phi_c) = H_c'(\phi_c)\,\dot{\phi}_c\right]$ resulta

$$H_c' = -4\pi G\dot{\phi}_c. \tag{3.14}$$

Con esto y (3.11) encontramos

$$V(\phi_c) = \frac{3M_p^2}{8\pi}\left(H_c^2 - \frac{M_p^2 {H_c'}^2}{12\pi}\right). \tag{3.15}$$

Esto significa que es suficiente con proponer la forma de $H_c(\phi_c)$, o del potencial $V(\phi_c)$, o bien del factor de expansión $a(t)$ para obtener completamente la dinámica clásica. Por ejemplo a través de una ley de potencias de tipo $[a(t) = \beta t^p]$; con $[p > 1]$. En tal caso, para el límite en que $[p \gg 1]$ se recupera una expansión ajustada a un modelo de De Sitter.

3.2.4 Dinámica cuántica del Inflatón

En este caso nuestro punto de partida es (3.12). Redefiniremos las fluctuaciones mediante un cambio de variables $\left[\phi = a^{-\frac{3}{2}}\,\chi\right]$ en búsqueda de una ecuación análoga a la de Klein-Gordon $\left[\ddot{\phi} - \left(\nabla^2 + m^2\right)\phi = 0\right]$.
Esto nos conduce a

$$\ddot{\chi} - \frac{\nabla^2\chi}{a^2} - m_{eff}^2\chi = 0, \tag{3.16}$$

con $\left[m_{eff}^2 = \frac{9}{4}H_c^2 + \frac{3}{2}\dot{H}_c - V''(\phi_c)\right]$.
Proponiendo que $\chi(t,\vec{r}) \sim F_k(t)G_k(\vec{r})$ se obtiene

$$\nabla^2 G_k(\vec{r}) + k^2 G_k(\vec{r}) = 0, \tag{3.17}$$

$$\ddot{F}_k(t) + \omega_k^2(t)F_k(t) = 0, \tag{3.18}$$

con $\left[\omega_k^2(t) = \frac{k^2}{a^2} - \left(\frac{9}{4}H_c^2 + \frac{3}{2}\dot{H}_c - V''(\phi_c)\right)^2\right]$. De aquí

$$\omega_k^2(t) = \frac{1}{a^2}\left(k^2 - k_0^2(t)\right), \tag{3.19}$$

donde $\left[k_0^2(t) = \left(\frac{9}{4}H_c^2 + \frac{3}{2}\dot{H}_c - V''\right)^2\right]$ es una función creciente del tiempo. Si tomamos un cierto modo k estable en un determinado instante, bastará con esperar suficiente para que resulte afectado por el crecimiento de $k_0^2(t)$ y se torne inestable.
Puedo representar χ por el desarrollo

$$\chi(t, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int dk^3 \left[a_k e^{i\vec{k}.\vec{r}} F_k(t) + a\dagger_k e^{-i\vec{k}.\vec{r}} F_k^*(t)\right]. \tag{3.20}$$

Para cada $F_k(t)$ de (3.18) podemos decir que

$$\omega_k^2 > 0 \longrightarrow F_k \sim \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t\,, \tag{3.21}$$

$$\omega_k^2 < 0 \longrightarrow F_k \sim \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{-\lambda t}\,. \tag{3.22}$$

En los modelos realizables de inflación $k_0(t)$ crece con el tiempo y además $\frac{k_0^2}{a^2} \sim H_c^2$. Definimos entonces la longitud de onda de horizonte causal

$$\lambda_h \sim \frac{a}{k_0} \sim \frac{1}{H_c}, \tag{3.23}$$

y análogamente la longitud de honda de horizonte físico

$$\lambda_{fis} \sim \frac{a}{k}. \tag{3.24}$$

Resulta claro que cuando $\left[\omega_k^2 < 0\right]$ los modos son inestables, entonces $\left[k^2 < k_0^2\right]$ y $\left[\lambda_{fis} > \frac{1}{H_c}\right]$. Es decir que la longitud de onda física es mayor a la que es propia del horizonte causal. Esto da una buena idea del mecanismo con que las fluctuaciones cuánticas "desparraman" la materia en el universo.
Aplicando al desarrollo (3.20) la relación de conmutación $[\chi(t, \vec{r}), \dot{\chi}(t, \vec{r}')] = i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$, se obtiene la normalización de los modos según

$$F_k(t)\dot{F}_k^*(t) - F_k^*(t)\dot{F}_k(t) = i. \tag{3.25}$$

Para los modos del espectro de onda larga, que son los que importan a escala cosmológica, puede hacerse lo que se llama "aproximación de grano grueso" incluyendo en (3.20) una distribución de Heavyside $\theta(\varepsilon_0 - k)$, que discrimina las longitudes de onda cortas. De este modo definiríamos un χ_L , que llega a tratarse tras cierto manejo matemático y algunas aproximaciones, basadas sobre todo en el hecho que $k_0^2 > k^2$, mediante una ecuación estocástica que es válida en el límite infrarrojo.

3.3 Inflación Tibia

3.3.1 La Idea de Berera y Fang

El concepto de Inflación tibia[17] es introducido por Arjun Barera y Li-Zhi Fang (1994) como un medio de estudiar las fluctuaciones del campo escalar. Es grande su importancia debido a que estas fluctuaciones cuánticas son las responsables de la formación de estructuras a gran escala para el modelo de inflación caótica. Las observaciones experimentales ayudaron al modelo a fijar ciertos parámetros para las amplitudes, que deberían ser Gaussianas y ajustadas a una ley de potencias con un espectro regido por un índice $n \sim 1$. Pero al no poder explicarlas naturalmente, debe recurrir a complicados potenciales establecidos Ad hoc, en los que diversos parámetros desconocidos pueden ajustar prácticamente cualquier rango de amplitudes y en consecuencia no se obtienen predicciones acerca de cuales deben ser sus valores iniciales.
Es importante decir que la medición de cierta anisotropía en la radiación cósmica de fondo facilita la oportunidad de poner a prueba directamente las posibles densidades iniciales de la perturbación.
Lo dicho motivó la idea de que fuera posible asignar al origen de las fluctuaciones una naturaleza térmica, no proviniente de las fluctuaciones cuánticas.
La componente térmica en la fase inflacionaria aparece como un recurso muy importante a la hora de colocar al campo cercano a su mínimo en la transición de fase. Después de todo, al menos al comienzo de tal período hay un contacto térmico entre el campo escalar y aquellos otros con los que interactúa. Durante la rodadura lenta ρ_ϕ y $V(\phi)$ permanecen aproximadamente constantes, lo cual es muy sugerente.
El modelo de inflación cótica separa además la expansión exponencial y el recalentamiento del universo en dos períodos bien definidos, emplazando el primero al universo en un estado superfrío y resultando el segundo a partir de un mecanismo temporalmente muy localizado que rápidamente distribuye una cantidad de energía de vacío en energía térmica, recalentándolo. El camino a través de una rodadura lenta con disipación térmica aparece como más natural y evita ese

fuerte recalentamiento, y por ende el problema de la creación de monopolos, que según predicciones del modelo estándar deberían formarse en grandes cantidades a altas temperaturas.

3.3.2 Desarrollo del modelo

Partimos de la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \varphi,_{\mu} \varphi,_{\nu} - V(\varphi) + \mathcal{L}_{int}, \tag{3.26}$$

donde $V(\varphi)$ es el potencial efectivo y $\mathcal{L}$ describe la interacción de φ con otros campos. La ecuación de movimiento para una expansión de De Sitter viene dada por

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \Upsilon_{\varphi}\dot{\varphi} - e^{-2Ht}\nabla^2\varphi + V'(\varphi) = 0, \tag{3.27}$$

donde $[\,\Upsilon_{\varphi}\dot{\varphi}\,]$ es un término de fricción que se ajusta a la descripción fenomenológica del decaimiento de φ vía interacción $\mathcal{L}_{int}$, y es una buena aproximación cuando la disipación se produce en un baño de radiación termalizado.
Se verá que la dependecia de las fluctuaciones con la forma de Υ_{φ} no es demasiado importante.
El hecho de que el modelo de inflación caótica divida claramente los dos períodos, de inflación y de calentamiento, implica que el término de fricción sólo es importante en el régimen de recalentamiento y despreciable durate la rodadura lenta, por lo que $3H \gg \Upsilon_{\varphi}$. En este caso la rodadura lenta viene dada por

$$\dot{\varphi} \simeq -\frac{V'(\varphi)}{3H}, \tag{3.28}$$

relación que se satisface cuando $\left[\,V'^2(\varphi) \lll V^2(\varphi)\,\right]$. Aquí $\left[H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{\varphi}\right]$ y $\left[\rho_{\varphi} = \dot{\varphi}^2 + V(\varphi\right]$ donde ρ_{φ} es la densidad de energía de φ.
Además $[\,V(\varphi) \sim V(0)\,]$.
La primer obsevación de Berera es que no resulta necesaria la condición $3H \gg \Upsilon_{\varphi}$ para obtener un proceso de rodadura lenta. Consideremos $\Upsilon_{\varphi} \sim H$, esto implica que el producto del decaimiento encuentra un rápido equilibrio en cierta temperatura T_r. Suponiendo que tal producto sea materia relativista obtenemos la ecuación de conservación

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = \Upsilon_{\varphi}\dot{\varphi}^2, \tag{3.29}$$

donde ρ_r es la densidad de energía de la componente térmica. La condición de rodadura lenta (3.28) debe en tal caso reemplazarse por

$$\dot{\varphi} \simeq -\frac{V'(\varphi)}{3H + \Upsilon_\varphi}, \tag{3.30}$$

$$\dot{\rho}_r = 0, \tag{3.31}$$

y además

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_\varphi + \rho_r\right). \tag{3.32}$$

Estrictamente hablando, cuando se contempla una componente térmica en el universo debe utilizarse un potencial efectivo de temperatura finita que reemplace al potencial de temperatura cero que aparece originalmente en nuestro tratamiento, $V(\varphi)$.
La ecuación (3.31) nos indica que, independientemente de las condiciones iniciales, la componente térmica encuentra un estado estable durante inflación, donde la energía térmica radiada es debida a la fricción. De (3.29) y (3.31) obtenemos para el período expansivo la expresión correspondiente a la densidad de energía térmica

$$\rho_r \cong \frac{\Upsilon_\varphi}{4H}\,\dot{\varphi}^2. \tag{3.33}$$

En esta época la energía cinética de φ, dada por $\frac{\dot{\varphi}^2}{2}$ es muy pequeña respecto de $\rho_\varphi \sim V(\varphi)$, por lo que tenemos $\rho_\varphi \gg \rho_r$.
Si tomamos Υ_φ cumpliendo

$$\Upsilon_\varphi \leq \alpha 4H, \tag{3.34}$$

con $\alpha > 1$, el sistema, en inflación, aún es dominado por la energía de vacío del campo escalar. En particular la componente térmica resulta despreciable. De todos modos, en cuanto a la temperatura del sistema, la presencia de tal componente no es necesariamente despreciable. La temperatura T_r viene dada por

$$T_r \cong \rho_r^{\frac{1}{4}} \cong \left(\frac{2M_p V \Upsilon_\varphi}{\dot{\varphi}^2}\right)^{\frac{1}{4}} M^{\frac{1}{2}}. \tag{3.35}$$

A partir de (3.33), (3.34) y (3.35) se puede ver que T_r debe ser mayor a la temperatura de Hawking H_{aw}.
Si $\left[\Upsilon_\varphi > \frac{M}{M_p}^5 \left(\frac{2MV(\varphi)}{\dot{\varphi}^2}\right)\right]$, esta relación de temperaturas se cumple, al igual que (3.34) y nuestra vieja condición de rodadura lenta $\left[V'^2(\varphi) \lll V^2(\varphi)\right]$, cuando

$$V^{\frac{3}{2}} M_p^{-3} \ll V' \ll V M_p^{-1}. \tag{3.36}$$

Por otro lado (3.35) implica que

$$T_r \ll M. \tag{3.37}$$

Usando $\left[V(\varphi) = \lambda\varphi^4\right]$ como un potencial posible, una expansión inflacionaria requiere $\left[\lambda \ll \left(\frac{M}{M_p}\right)^2\right]$. El efecto de este potencial en la temperatura es λT_r^2. Éstas últimas condiciones conducen a

$$\lambda T_r^2 \ll \frac{M^4}{M_p^2} \sim H_{aw}^2, \tag{3.38}$$

que, como habíamos pensado para la influencia del potencial, no es demasiado importante.
Las fluctuaciones térmicas de φ, están determinadas por H_{aw}. Se puede esperar que (3.37) nos de la condición bajo la cual las fluctuaciones térmicas compiten con las fluctuaciones cuánticas.

Chapter 4

Espacio Tiempo Materia

4.1 Introducción

Abordaremos las teorías llamadas "Espacio-Tiempo-Materia"[18] desde su evolución histórica, motivando su aparición y construcción como un medio de unificación de la gravedad con otras interacciones de la naturaleza.
Theodor Kaluza[19] (1921) y Oscar Klein[20] (1926) propusieron que un espacio 5D de coordenadas $(t, \vec{r}, \psi)$ podía utilizarse para obtener una teoría unificada de relatividad general y electromagnetismo. La unificación se da en tanto que, según las construcciones efectuadas por cada uno de ellos, ambas interacciones se ven descriptas en la métrica pentadimensional.
La importancia de estas ideas sigue siendo enorme debido a su naturaleza fundacional en la materia.
Muchos otros trabajos han llegado a nuestros días como modificaciones o extensiones de las Teorías de Kaluza-Klein, dando origen a las Teorías de Cuerdas, que a su vez sirven de génesis a las de Supercuerdas y Gravedad 11D.
En las teorías modernas la idea de Kaluza-Klein se encuentra con fuertes modificaciones. Por ejemplo puede darse una naturaleza no-compacta a la quinta coordenada, que repercute en el comportamiento de la materia en 4D. Entre estas últimas se encuentra la Teoría Espacio-Tiempo-Materia (STM), que es una de las formulaciones pentadimencionales no-compactas con fundamentos en el Teorema de Campbell-Magaard[21].
El teorema de Campbell-Magaard básicamente nos dice que toda variedad n-dimensional libre de singularidades puede ser localmente embebida en una variedad (n+1)-dimensional Ricci plana.

4.2 Teorías de Kaluza-Klein

Desarrollaremos aquí las ideas básicas de Kaluza y de Klein en su esfuerzo por unificar la Relatividad General de Einstein y el electromagnetismo de Maxwell en una misma teoría.
La idea de Kaluza radica en postular la existencia de una quinta dimensión de la que todos los campos son independientes. Esta condición es llamada "de cilindricidad" ya que se expresa mediante la anulación de todas las derivadas de los campos respecto a la quinta coordenada.
Si bien las ecuaciones esperadas son de la forma ${}^{(5)}G_{AB} = k\,{}^{(5)}T_{AB}$, con un tensor de energía momento de 5D, en general se han utilizado, por simplicidad matemática e interpretativa, las ecuaciones propias de un vacío aparente pentadimencional, es decir ${}^{(5)}G_{AB} = 0$.
La unificación para las teorías de Relatividad General de Einstein y de Electromagnetismo de Maxwell es obtenida por Kaluza a través del límite de campo débil.
El trabajo de Theodor Kaluza sufre de algunos inconvenientes. No hay explicación para la suposición de que ningún campo deba tener dependencia con la quinta coordenada, ni se encuentra justicación al hecho de que tal coordenada adicional no sea percibida por nosotros.
Además existen problemas de aplicabilidad en el área de partículas elementales, debido a la aproximación límite de campo débil y bajas velocidades, que no resulta adecuada para electrones ni protones.
Oscar Klein resuelve los dos problemas anteriores (inherentes a la teoría misma de Kaluza), mediante la suposición de que la coordenada adicional es compacta y periódica, sin necesidad de exigir la condición de cilindricidad. Dotando la coordenada extra con una topología circular ($S^{(1)}$), y radio del orden de la Longitud de Planck. Este radio tan pequeño para la coordenada adicional sería el motivo por el que no la habríamos apreciado ya experimentalmente.
La periodicidad de ψ agrega el hecho de que los campos admitan una expansión de Fourier, y desde tal desarrollo se obtiene su dinámica. Esto termina de redondear la idea central de las Teorías de Kaluza-Klein (KK).
Aunque esta formulación tampoco es ajena a los inconvenientes, ya que existen en particular ciertas evidencias experimentales que le son contradictorias en el ámbito de su aplicación a fermiones.

4.2.1 Desarrollo de la idea de Kaluza

Theodor Kaluza efectuó su trabajo sobre una variedad Riemanniana pentadimensional cuyo elemento de línea está dado por

$$dS^2 = g_{AB}(x^\mu, \psi)dx^A dx^B, \tag{4.1}$$

con [A,B = 0,1,2,3,4], donde ψ es la coordenada espacial adicional.
Una vez establecido el elemento de línea. Puede reconstruirse de modo totalmente análogo a lo efectuado en 4D una formulación tipo TGR para el vacío pentadimensional en función de la métrica.
En virtud de la condición de cilindricidad tenemos

$$2\Gamma_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\nu\lambda,\mu}, \tag{4.2}$$

$$2\Gamma_{\lambda\mu 4} = -g_{\mu 4,\lambda} - g_{4\lambda,\mu}, \tag{4.3}$$

$$2\Gamma_{4\mu\nu} = g_{4\mu,\nu} - g_{\nu 4,\mu}, \tag{4.4}$$

$$2\Gamma_{44\nu} = g_{44,\nu}, \tag{4.5}$$

$$2\Gamma_{4\mu 4} = -g_{44,\mu,}, \tag{4.6}$$

$$2\Gamma_{444} = 0. \tag{4.7}$$

Se impone la condición

$$g_{4\mu} = 2\alpha A_\mu, \tag{4.8}$$

$$g_{44} = 2\phi, \tag{4.9}$$

siendo A_μ el potencial tetravector electromagnético, ϕ un campo escalar y α una constante de proporcionalidad. Relacionando la parte puramente pentadimensional de la métrica con el electromagnetismo, las ecuaciones toman la forma

$$2\Gamma_{\lambda\mu\nu} = g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\nu\lambda,\mu}, \tag{4.10}$$

$$\Gamma_{4\mu\nu} = \alpha\,(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) = \alpha F_{\mu\nu}, \tag{4.11}$$

$$\Gamma_{\mu\nu 4} = -\alpha\,(A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}) = -\alpha F_{\mu\nu}, \tag{4.12}$$

$$\Gamma_{44\mu} = -\Gamma_{4\mu 4} = \phi_{,\mu}. \tag{4.13}$$

Además se puede ver que

$$F_{[\mu\nu,\lambda]} = 0, \tag{4.14}$$

$$\phi_{,\mu\nu} = 0, \tag{4.15}$$

donde los corchetes denotan antisimetrización. Notar que (4.14) corresponde a las ecuaciones de Maxwell homogéneas.

Efectuando la aproximación de campo débil, en que la métrica g_{AB} difiere de un espacio de Minkowsky, representado por η_{AB}, sólo en una cantidad muy pequeña

$$g_{AB} = \eta_{AB} + h_{AB}, \tag{4.16}$$

con $h_{AB} \ll 1$, podemos obtener las cincuenta componentes independientes del tensor de Riemann, cuyos coeficientes no nulos son

$$R^{\mu}_{\nu\sigma\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}, \tag{4.17}$$

$$R^{\mu}_{\nu\lambda 4} = \alpha F^{\mu}_{\nu,\lambda}, \tag{4.18}$$

$$R^{4}_{\mu 4\nu} = -\phi_{,\mu\nu}, \tag{4.19}$$

mediante cotracción obtenemos el tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu,\lambda}, \tag{4.20}$$

$$R_{4\nu} = -\alpha\partial^{\,\mu} F_{\mu\nu}, \tag{4.21}$$

$$R_{44} = -\Box\,\phi, \tag{4.22}$$

donde $\Box$ es el operador D'alambertiano.
Bajo la aproximación de campo débil el tensor de energía-momento toma la forma

$$T^{AB} = \varrho\, U^{A} U^{B}, \tag{4.23}$$

donde ϱ es la densidad de masa y U^A la pentavelocidad.
Las ecuaciones gravitacionales resultantes son

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g_{AB} T^{AB} \right). \tag{4.24}$$

De estas ecuaciones se recupera la Relatividad General. Las ecuaciones electromagnéticas son

$$R_{4\mu} = -\kappa T_{4\mu}. \tag{4.25}$$

Por otro lado sabemos que

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu = \rho_0 V_\nu, \tag{4.26}$$

donde ρ_0 es la densidad de carga, V_ν la tetravelocidad asociada y $\partial^\mu F_{\mu\nu}$ es la divergencia del tensor de Maxwell. Substituyendo (4.26) en (4.25) y tomando en cuenta (4.23) se obtiene

$$\rho_0 V_\mu = \left(\frac{\kappa}{\alpha} \right) \varrho U_4 U_\mu. \tag{4.27}$$

En el límite de bajas velocidades, definido por $[\, U_0 = c, U_i \ll c \,]$, se puede decir que $[\, V_\mu \sim U_\mu \,]$ y cuando $\left[\, \alpha = \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \,\right]$, se obtiene una carga por unidad de masa dada según

$$\frac{\rho_0}{\varrho} = 2\alpha U_4. \tag{4.28}$$

Esta ecuación permite interpretar a la carga moviéndose a través de la quinta dimensión en relación a la correspondiente componente del tensor energía-momento, $[\, T_{44} \propto \rho_0 V_4 \,]$.

Finalmente para las ecuaciones propias del campo escalar debemos tomar en cuenta que, a bajas velocidades, $[\, T_{ij} \cong 0 \,]$, con $i, j \neq 0$. Entonces

$$T = g^{AB} T_{AB} = -T_{00} = -\varrho, \tag{4.29}$$

y por ende las ecuaciones resultan en la forma

$$R_{44} = \frac{1}{2} \kappa \varrho. \tag{4.30}$$

Kaluza obtuvo entonces una teoría que mediante un solo campo covariante en cinco dimensiones genera la Relatividad General y el Electromagnetismo en 4D. Sin embargo, como ya se ha mencionado esta teoría tiene varios inconvenientes, fallando en el límite de altas velocidades.

4.2.2 Desarrollo de la idea de Klein

La propuesta de Klein es similar a la de Kaluza, pero la métrica es definida mediante un tensor fundamental cuyas componentes son

$$^{(5)}g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - k^2\phi^2 A_\alpha A_\beta, \tag{4.31}$$

$$^{(5)}g_{\alpha 4} = -k\phi^2 A_\alpha, \tag{4.32}$$

$$^{(5)}g_{44} = -\phi^2, \tag{4.33}$$

donde k es una constante de acoplamiento vinculada a las ecuaciones de campo 4D. Con esto Klein garantizaba que $g_{\alpha\beta}$, A_α y ϕ se coportaran como un tensor, un vector y un escalar respectivamente y ante transformaciones generales de coordenadas en el espacio tetradimensional.
La acción asociada a un espacio pentadimensional que permite describir efectos gravitacionales viene dada según

$$^{(5)}I = \frac{1}{2\,^{(5)}k^2}\int d^5x\sqrt{|^{(5)}\,g\,|}\;^{(5)}R, \tag{4.34}$$

donde $^{(5)}k^2$ es la constante de acoplamiento gravitacional pentadimensional y $^{(5)}R$ la curvatura escalar pentadimensional. Esta acción es invariante ante la transformación en cinco dimensiones

$$\delta g_{AB} = \partial_A\xi^C g_{CB} + \partial_B\xi^C g_{CA} + \xi^C\partial_C g_{AB}, \tag{4.35}$$

donde ξ^C es un vector de desplazamiento diferencial vinculado a las simetrías 5D.

Con esto las ecuaciones de campo en el vacío 5D se reducen a las ecuaciones de campo 4D

$$G_{\mu\nu} = \frac{k^2\phi^2}{2}T_{\mu\nu} - \frac{1}{\phi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Box\,\phi\right), \tag{4.36}$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = -3\frac{\nabla^\mu\phi}{\phi}F_{\mu\nu}, \tag{4.37}$$

$$\Box\,\phi = -\frac{k^2\phi^3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{4.38}$$

donde $[\,\mu,\nu=0,1,2,3\,]$. Todas las cantidades mensionadas son las usuales en 4D. Con $\left[\,T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}-F^{\gamma}{}_{\mu}F_{\nu\gamma}\right)\,\right]$ y $[\,\Box=g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\,]$ el operador de onda asociado al espacio tetradimensional.
Las ecuaciones (4.37) representan el electromagnetismo, con fuentes modificadas por el campo escalar, que satisface a su vez una ecuación de onda a través de (4.38). El lado derecho de (4.36) representa el tensor de energía-momento 4D inducido desde 5D a partir de la curvatura provocada por el campo escalar y el electromagnetismo.
Ahora debemos implementar la condición de compacidad, mediante la expresión $[\,\psi=\psi+2\pi r\,]$, lo que implica periodicidad de los campos en ψ y nos permite realizar las siguientes expansiones en series de Fourier para los campos

$$g_{\alpha\beta}(\vec{x},\psi)=\sum_{(n=-\infty\to+\infty)}g_{\alpha\beta n}(\vec{x})e^{in(\psi/r)}, \tag{4.39}$$

$$A_{\alpha}(\vec{x},\psi)=\sum_{(n=-\infty\to+\infty)}A_{\alpha n}(\vec{x})e^{in(\psi/r)}, \tag{4.40}$$

$$\phi(\vec{x},\psi)=\sum_{(n=-\infty\to+\infty)}\phi_{n}(\vec{x})e^{in(\psi/r)}. \tag{4.41}$$

Dado que también $\xi^{C}=\xi^{C}(\vec{x},\psi)$, entonces

$$\xi^{C}(\vec{x},\psi)=\sum_{(n=-\infty\to+\infty)}\xi^{C}_{n}(\vec{x})e^{in(\psi/r)}, \tag{4.42}$$

donde los coeficientes en cada expansión satisfacen

$$C^{*}{}_{n}(\vec{x})=C_{-n}(\vec{x}). \tag{4.43}$$

Por lo tanto la teoría describe infinitos campos y simetrías tetradimensionales. Originalmente Klein sólo se ocupó de los primeros términos de cada expansión, simplificando así el problema.

Las ecuaciones de movimiento correspondientes a la acción (4.34) pueden escribirse de la siguiente manera

$$\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu}-\partial^{\psi}\partial_{\psi}\right)g_{\mu\nu}(\vec{x},\psi)=0, \tag{4.44}$$

$$\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu}-\partial^{\psi}\partial_{\psi}\right)A_{\mu}(\vec{x},\psi)=0, \tag{4.45}$$

$$\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu} - \partial^{\psi}\partial_{\psi}\right)\phi(\vec{x},\psi) = 0. \tag{4.46}$$

Dadas las expansiones de Fourier podemos transformar estas ecuaciones en otras equivalentes para los correspondientes coeficientes

$$\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu} + \frac{n^2}{r^2} g_{\mu\nu n}(\vec{x})\right) = 0, \tag{4.47}$$

$$\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu} + \frac{n^2}{r^2} A_{\mu n}(\vec{x})\right) = 0, \tag{4.48}$$

$$\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu} + \frac{n^2}{r^2} \phi_{n}(\vec{x})\right) = 0. \tag{4.49}$$

Mediante la comparación de estas expresiones con la ecuación de Klein-Gordon se obtiene la ”masa” para los campos, $\left[m_n \sim \frac{1}{r} \right]$, donde n hace referencia a cada modo de excitación. Por otra parte, debido a que el objetivo es unificar las interacciones gravitacionales y electromagnéticas, el radio natural de compactificación debe corresponderse con la longitud de Planck, $\left[r \cong \frac{1}{M_p} = 1.62\ \ 10^{-35} m \right]$.

4.3 Teorías Espacio-Tiempo-Materia (STM)

Estas teorías fueron desarrolladas por Paul Wesson y Jaime Ponce de León[22] en la década de 1980, y explican las propiedades de la materia como una consecuencia del vacío geométrico en 5D. A diferencia de las viejas teorías KK todos los coeficientes métricos dependen de la quinta coordenada ψ no-compacta, y pueden entonces definirse adecuadamente cantidades relacionadas con la materia a partir de ψ y sus derivadas. El paso de 5D a 4D se efectúa habitualmente por medio de una foliación $\psi = cte$.

4.3.1 Desarrollo de la teoría STM según el enfoque de Mc Manus

La teoría STM es tratada por Des J. Mc Manus[23] para el caso de una subfamilia particular de las métricas 4D tipo FRW o intrínsecamente FRW, es decir para el caso cosmológico. Propone como punto de partida las ecuaciones de Einstein 5D de un vacío aparente $\left[{}^{(5)}G_{AB} = 0\right]$ (donde $c = 8\pi G = 1$) y se centra en obtener las ecuaciones 4D $\left[{}^{(4)}G_{\alpha\beta} ={}^{(4)} T_{\alpha\beta}\right]$ utilizando la métrica 5D

$$dS^2 = -e^{2A}dt^2 + \left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^{-2} e^{2B} d\vec{r}^2 + e^{2C} d\psi^2, \tag{4.50}$$

donde A,B,C son coeficientes con dependencia en las coordenadas t y ψ. Además $[r^2 = x^2 + y^2 + z^2]$ y $[k = -1, 0, +1]$.
La métrica resultante de la foliación $\psi = cte.$ para la hipersuperficie 4D es

$$d\sigma^2 = -e^{2A}dt^2 + \left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^{-2} e^{2B}d\vec{r}^2. \tag{4.51}$$

Claramente, si $e^{2A} = 1$ y $e^{2B}(t) = a^2(t)$, estamos ante una métrica de FRW. De no ser así mediante el cambio de variables $\left[\tau = \int e^A\,dt\right]; \left[R = \int \frac{dr}{1+\frac{k}{4}r^2}\right]$ obtenemos una métrica de FRW a la que corresponde $e^{2B}(t(\tau)) = a^2(t(\tau))$.

4.3.2 Algunas ecuaciones importantes sobre la métrica FRW

De aplicar las ecuaciones de Einstein, con el tensor de energía-momento de un gas ideal para una métrica de FRW, surge que

$$\frac{\dot{a}^2 + 2k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{4.52}$$

$$-\frac{\left(2a\dot{a} + \dot{a}^2 + 2k\right)}{a^2} = 8\pi G p\,, \tag{4.53}$$

siendo p la presión y ρ la densidad.
De la convinación de las ecuaciones (4.52)y(4.53) surge que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(3p + \rho\right). \tag{4.54}$$

De (4.52) y (4.54) se obtiene la llamada Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial\left(a^3\rho\right)}{\partial t} = -p\frac{\partial a^3}{\partial t}. \tag{4.55}$$

La métrica 4D dada por (4.51) cuando $\psi = cte$, donde $\left[\tau = \int e^A\,dt\right]$; $\left[R = \int \frac{dr}{1+\frac{k}{4}r^2}\right]$, es

$$d\sigma^2 = -d\tau + \left(e^{B(t(\tau))}\right)^2 d\vec{r}^2. \tag{4.56}$$

Ésta debe responder a las ecuaciones (4.54) y (4.55) como cualquier caso particular de métrica FRW, de modo que

$$\frac{\partial^2 e^{B(t(\tau))}}{\partial \tau^2} + \frac{4\pi G}{3}\left(3p+\rho\right) e^{B(t(\tau))} = 0, \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial \left(\rho e^{3B(t(\tau))}\right)}{\partial \tau} + p\frac{\partial e^{3B(t(\tau))}}{\partial \tau} = 0, \tag{4.58}$$

donde p y ρ, son claramente magnitudes referidas al universo 4D y a la realidad física.

4.3.3 Idea Central

Para desarrollar el núcleo de la idea que gobierna las teorías STM vamos a tomar la métrica propuesta por Mc Manus según (4.50) y a plantear las ecuaciones de Einstein de vacío en 5D, redefiniendo después p y ρ en función de cantidades asociadas a la quinta coordenada ψ y sus derivadas. En nuestro caso esas cantidades serán el coeficiente C, derivadas temporales de C y derivadas respecto de ψ. Así veremos surgir la dinámica de un universo 4D material a partir de un espacio 5D vacío. Es decir que veremos a la materia siendo inducida por fuentes propias del vacío pentadimensional.

4.3.4 Desarrollo de las Ecuaciones de Einstein y materia inducida

Para la métrica (4.51), con $c = 8\pi G = 1$, las ecuaciones asociadas a un tensor de energía-momento de un gas ideal resultan

$$^{(4)}G^0{}_0 = 3\left[e^{-2A}\dot{B}^2 + k\,e^{-2B}\right] = \rho, \tag{4.59}$$

$$^{(4)}G^1{}_1 = -\left[e^{-2A}\left(2\dot{A}\dot{B} - 3\dot{B}^2 - 2\ddot{B}\right) - e^{-2B}\right] = -p, \tag{4.60}$$

de modo que estas ρ y p satisfacen (4.57) y (4.58) por ser la métrica intrínsecamente FRW.

Ahora escribiremos (4.59) y (4.60) con fuentes que provienen de la quinta coordenada de un espacio 5D vacío, que de este modo induce la materia del universo 4D.

Las ecuaciones de Einstein de vacío para la métrica (4.50), considerando los coeficientes A,B,C como funciones de t y de ψ, con $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $k = -1, 0, 1$

y denotando $\frac{\partial A}{\partial \psi} = A'$, son

(4.61)
$$^{(5)}G^0{}_0 = 3\left[e^{-2C}\left(2B'^2 - B'C' + B''\right) - e^{-2A}\dot{B}\dot{C}\right] - 3\left[e^{-2A}\dot{B}^2 + ke^{-2B}\right] = 0,$$
(4.62)
$$^{(5)}G^1{}_1 = \left[e^{-2C}\left(A'^2 + 2A'B' - A'C' + A'' + 3B'^2 - 2B'C' + 2B''\right) + \right.$$
$$\left. + e^{-2A}\left(\dot{A}\dot{C} - 2\dot{B}\dot{C} - \dot{C}^2 - \ddot{C}\right)\right] + \left[e^{-2A}\left(2\dot{A}\dot{B} - 3\dot{B}^2 - \ddot{B}\right) - ke^{-2B}\right] = 0,$$
(4.63)
$$^{(5)}G^0{}_4 = 3e^{-2A}\left(\dot{B}' + \dot{B}B''\dot{B} - B'\dot{C}\right) = 0,$$
(4.64)
$$^{(5)}G^4{}_4 = 3e^{-2A}\left(\dot{A}\dot{B} - 2\dot{B}^2 - \ddot{B}\right) + 3e^{-2C}\left(A'B' + B'^2\right) - 2ke^{-2B} = 0.$$

Además, cabe aclarar que $\left[^{(5)}G^1{}_1 =^{(5)} G^2{}_2 =^{(5)} G^3{}_3\right]$ y $\left[^{(5)}G^0{}_1 =^{(5)} G^0{}_2 =^{(5)} G^0{}_3 = 0\right]$.
Comparando las ecuaciones (4.59) y (4.61) vemos que el último término de $^{(5)}G^0{}_0$ es justamente la expresión de ρ en el universo 4D. Nuevamente, cotejando (4.60) y (4.62) resulta claro que el último término de $^{(5)}G^1{}_1$ es la expresión obtenida en el universo 4D para p.
Podemos expresar entonces ρ y p por

$$\rho = 3\left[e^{-2C}\left(2B'^2 - B'C' + B''\right) - e^{-2A}\dot{B}\dot{C}\right], \tag{4.65}$$

(4.66)
$$\begin{aligned} p = & - \left[e^{-2C}\left(A'^2 + 2A'B' - A'C' + A'' + 3B'^2 - 2B'C' + 2B''\right) + \right. \\ & + \left. e^{-2A}\left(\dot{A}\dot{C} - 2\dot{B}\dot{C} - \dot{C}^2 - \ddot{C}\right)\right], \end{aligned}$$

que están escritas exclusivamente en términos dependientes de la quinta coordenada. Asociando un tensor de energía-momento de vacío $^{(5)}(T_{AB} = 0)$ al espacio 5D se engendra entonces una dinámica para el espacio 4D con un tensor de energía-momento propio de un gas perfecto, induciendo las expresiones de presión y densidad desde el 5D vacío.
El hecho de que deban cumplirse las condiciones (4.63) y (4.64) impone una restricción sobre las métricas en que es factible utilizar la condición de vacío, remitiéndonos como resultado a una subclase de las métricas de FRW.

4.3.5 Aplicación a una métrica particular

La métrica que utilizaremos para describir el vacío pentadimensional es Riemann-plana, por lo que satisface naturalmente las condiciones (4.63) y (4.64), resultando directamente de sus ecuaciones de Einstein que ${}^{(5)}G^{i}{}_{j} = 0$,

$$dS^2 = \psi^2 \frac{\Lambda(t)}{3} dt^2 - \psi^2 e^{2\int dt\sqrt{\Lambda(t)/3}} d\vec{r}^2 - d\psi^2. \tag{4.67}$$

En este caso la curvatura espacial k es nula y

$$e^{2A} = \frac{\psi^2 \Lambda}{3}, \tag{4.68}$$

$$e^{2B} = \psi^2 e^{2\int \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} dt}, \tag{4.69}$$

$$e^{C} = 1, \tag{4.70}$$

De acuerdo a las ecuaciones (4.65) y (4.66), conducen a las siguientes expresiones para ρ y p:

$$\rho = 3\psi^{-2}, \tag{4.71}$$

$$p = -3\psi^{-2}. \tag{4.72}$$

Claramente ambas son constantes y responden a una ecuación de estado

$$p = \omega\rho, \tag{4.73}$$

en la que $\omega = -1$. En el caso en que $\Lambda = cte$ representa el comportamiento típico de un modelo inflacionario de de Sitter.

Chapter 5

Disipación desde un vacío en 5D

5.1 Introducción

Consideraremos una métrica pentadimensional plana ($R^{A}{}_{BCD} = 0$), sobre la que definimos un estado de vacío. Nuestra intención es obtener la dinámica de un campo escalar sobre una hipersuperficie 4D, basándonos en el enfoque de la teoría de materia inducida[22]. A diferencia de lo hecho hasta ahora en los trabajos que hemos visto, utilizaremos una foliación dinámica sobre la dimensión extra. Dicha dimensión se piensa de tipo espacial y no compacta. Esto es equivalente a considerar una métrica efectiva 4D que describe la expansión de un universo espacialmente isotrópico, homogéneo y plano. Desde el punto de vista relativista esto significa sostener la elección de un sistema de referencia particular.
Consideraremos la expansión adiabática del universo sobre la métrica foliada y finalmente estudiaremos una métrica de tipo FRW. Veremos que al analizar la dinámica del campo inflatón desde dicha métrica se constata la aparición de un término adicional, que puede ser interpretado como de procedencia disipativa. Tal disipación puede ser vista en función de la Lagrangiana efectiva sobre la métrica FRW como de origen no conservativo, dando lugar a un incremento de la entropía en el sistema. Desde el punto de vista relativista la expansión no adiabática se puede considerar una consecuencia de la ”ruptura” del principio de equivalencia.

5.2 Desarrollo de la dinámica 5D

La métrica 5D que utilizaremos es[24]:

$$dS^2 = \psi^2\, \frac{\Lambda(t)}{3}\, dt^2 - \psi^2\, e^{2\int dt\sqrt{\Lambda(t)/3}} d\vec{r}^{\,2} - d\psi^2, \tag{5.1}$$

que tiene la propiedad de que todos los coeficientes del tensor de curvatura son nulos, es decir que resulta Riemann-plana.
Consideremos la acción:

$${}^{(5)}I = \int d^4x\, d\psi \sqrt{\left|\frac{{}^{(5)}g}{{}^{(5)}g_0}\right|} \left(\frac{{}^{(5)}\mathcal{R}}{16\pi G} + \frac{1}{2} g^{AB} \varphi_{,A}\, \varphi_{,B}\right), \tag{5.2}$$

donde ${}^{(5)}g$ es el determinante de g_{AB}, con $[\,A, B = 0, 1, 2, 3, 4\,]$, cuya expresión es

$${}^{(5)}g = \psi^8\, \frac{\Lambda}{3}\, e^{6\int dt\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}. \tag{5.3}$$

En general las ecuaciones de Lagrange, cuando $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$, se escriben

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\mu}}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\mu}}\right) = 0, \tag{5.4}$$

Aplicándolas a la acción (5.2), sobre una métrica dada por

$$dS^2 = g_{tt}\, dt^2 + g_{ij}\, dx^i\, dx^{j\,2} + g_{\psi\psi}\, d\psi^2, \tag{5.5}$$

donde $[i, j = 1, 2, 3]$, se obtiene la ecuación que describe la dinámica para el campo φ

(5.6)
$$\ddot{\varphi} + \left[\frac{3\dot{a}}{a} + \frac{\dot{g}_{tt}}{g_{tt}} + \frac{\dot{\sqrt{g^{\psi\psi}}}}{\sqrt{g^{\psi\psi}}}\right]\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2{}_r\varphi}{a^2} - g_{tt}g^{\psi\psi}\left[\left(\frac{a'}{a} + \frac{{g_{tt}}'}{g_{tt}} + \frac{{g_{rr}}'}{g_{rr}} + \frac{\sqrt{g^{\psi\psi}}'}{\sqrt{g^{\psi\psi}}}\right)\varphi' + \varphi''\right] = 0,$$

donde se ha usado la tilde o "prima" para denotar la derivada respecto de ψ.
Además, $\left[a(t) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda(t)}}\,\psi\, e^{\int dt\sqrt{\frac{\Lambda(t)}{3}}}\right]$.
La ecuación de movimiento que describe la dinámica de φ en el espacio 5D, según (5.6) cuando la métrica (5.5) toma la forma (5.1), es:

$$(5.7)\qquad \ddot{\varphi}+\left[3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}-\frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda}\right]\dot{\varphi}-\frac{\Lambda}{3}\,e^{-2\int\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}dt}\nabla^2\varphi-\frac{\Lambda}{3}\left(4\psi\varphi,_{\psi}+\psi^2\varphi,_{\psi\psi}\right)=0,$$

donde $\left[\frac{3\dot{a}}{a}+\frac{\dot{g}_{tt}}{g_{tt}}=3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}-\frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda}\right]$ y $\left[g^{\psi\psi}=1\right]$.
Para trabajar esta ecuación utilizamos el siguiente cambio de variables:

$$(5.8)\qquad \varphi(t,\vec{r},\psi)=\chi(t,\vec{r},\psi)\,e^{-\frac{1}{2}\int dt 3\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}-\frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda}\right)},$$

obteniendo así la nueva expresión

(5.9)

$$\begin{aligned}\ddot{\chi} \quad &- \quad \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\frac{\dot{\Lambda}}{\sqrt{3\Lambda}}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\ddot{\Lambda}}{\Lambda}-\left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right)^2\right\}+\frac{1}{2}\left(3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}-\frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda}\right)^2\right]\chi-\\ &- \quad \frac{\Lambda}{3}e^{-2\int dt\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}\nabla_r^2\chi-\frac{\Lambda}{3}\left(4\psi\chi_{,\psi}+\psi^2\chi_{,\psi\psi}\right)=0.\end{aligned}$$

Consideramos la siguiente separacion de variables $\chi\sim F_{km}(t)\,G_k(\vec{r})\,H_m(\psi)$, y luego hacemos la sustitución: $H_m(\psi)=e^{-\frac{3}{2}Z(\psi)}L_m\left(Z(\psi)\right)$, con $Z(\psi)=\ln(\psi/\psi_0)$. Se obtiene el nuevo conjunto de ecuaciones

$$(5.10)\qquad m^2 Ł_m(\psi)+\left(Ł_m(\psi)\right)_{,zz}=0,$$

$$(5.11)\qquad \nabla_r^2 G_k(\vec{r})+k^2 G_k(\vec{r})=0,$$

$$(5.12)\qquad \ddot{F}_{km}(t)+\left[\frac{k^2\Lambda(t)}{3}\,e^{-2\int dt\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}}-m_{eff}^2\right]F_{km}(t)=0,$$

donde m_{eff} puede ser interpretado como un término de masa efectiva y se expresa de la siguiente manera

$$(5.13)\quad m_{eff}^2=\frac{3}{4}\frac{\dot{\Lambda}}{\sqrt{3\Lambda}}-\frac{1}{4}\left[\frac{\ddot{\Lambda}}{\Lambda}-\left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right)^2\right]+\frac{1}{4}\left(3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}-\frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda}\right)^2-\Lambda\left(\frac{m^2+\frac{9}{4}}{3}\right)^2.$$

A su vez podemos escribir χ como una expansión de Fourier:

$$\chi(t,\vec{r},\psi) = \frac{e^{-\frac{3}{2}z}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \left(a_k e^{i\vec{k}.\vec{r}} \xi_k(t,\psi) + a_k^{\dagger} e^{-i\vec{k}.\vec{r}} \xi_k^*(t,\psi) \right), \tag{5.14}$$

para lo cual usamos que

$$\xi_k(t,\psi) = \int dm\, L_m\left(z(\psi)\right)\, F_{km}(t). \tag{5.15}$$

Entonces se obtiene la relación

$$\left\langle 0 \left[\chi(t,\vec{r},\psi), \dot{\chi}(t,\vec{r}\,',\psi) \right] 0 \right\rangle = i\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,'), \tag{5.16}$$

que se cumple cuando

$$\xi_k(t,\psi)\,\dot{\xi}_k^*(t,\psi) - \xi_k^*(t,\psi)\,\dot{\xi}_k(t,\psi) = i\,e^{-3Z}. \tag{5.17}$$

Finalmente, recordando que $Z = \ln(\frac{\psi}{\psi_0})$ y $\Pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$, se obtiene el siguiente álgebra:

$$\left[\varphi(t,\vec{r},\psi), \Pi^0(t,\vec{r}\,',\psi) \right] = i g^{tt} \sqrt{\frac{|^{(5)}g|}{|^{(5)}g_0|}} \left[\frac{\psi_0}{\psi} \right]^3 e^{-3\int dt \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right)} \delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,'), \tag{5.18}$$

con $g^{tt} = \frac{3}{\Lambda\psi^2}$.
La identidad $g_{AB}\, U^A\, U^B = 1$ (con A,B=0,1,2,3,4), hace referencia a que la métrica es globalmente hiperbólica. Considerando un sistema de coordenadas comóviles ($U^i = 0\,;\, i = 1,2,3$), nos conduce a partir de su aplicación sobre (5.1) a una relación para las pentavelocidades dada por

$$\frac{\psi^2 \Lambda}{3} U^0 U^0 - \dot{\psi}^2 = 1. \tag{5.19}$$

5.3 Desarrollo de la dinámica 4D, para una hipersuperficie caracterizada mediante una métrica obtenida a partir de la foliación $\psi = cte$

Consideraremos una distancia $S(t,\vec{r})$ en (5.1) tal que $\psi = cte$, e incluiremos esta ligadura para obtener una foliación del espacio de 5D a 4D[25]. En este

caso está claro que $d\psi = 0$.
La acción efectiva en 4D, con $(\alpha, \beta = 0,1,2,3)$, será:

$$
{}^{(4)}\mathcal{L} = {}^{(5)}\mathcal{L}|_{(\psi=cte)} = \sqrt{\frac{|{}^{(4)}g|}{|{}^{(4)}g_0|}} \left(\frac{{}^{(4)}\mathcal{R}}{16\pi G} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha}\, \varphi_{,\beta} - \frac{1}{2} \varphi^2_{,\psi} \right) |_{(\psi=cte)}, \tag{5.20}
$$

donde ${}^{(4)}\mathcal{R}$ es el escalar de Ricci sobre la métrica efectiva de 4D,

$$
d\sigma^2 = dS^2|_{\psi=cte} = \frac{\psi^2 \Lambda}{3} - \psi^2\, e^{2\int dt \sqrt{\Lambda(t)/3}} d\vec{r}^2, \tag{5.21}
$$

luego de haber realizado la foliación.
Las ecuaciones de Lagrange resultan en una dinámica gobernada por la siguiente expresión:

$$
\ddot{\varphi} + \left(\frac{\dot{\sqrt{|{}^{(4)}g|}}}{\sqrt{|{}^{(4)}g|}} + \frac{\dot{g}^{tt}}{g^{tt}} \right) \dot{\varphi} + \frac{g^{xx}}{g^{tt}} \nabla^2{}_r \varphi - \frac{\Lambda}{3} \left(4\psi \chi_{,\psi} + \psi^2 \chi_{,\psi\psi} \right) |_{(\psi=cte)} = 0, \tag{5.22}
$$

donde $[g^{xx} = g^{yy} = g^{zz}]$ y el subíndice "r" en $\nabla^2{}_r$ indica que este operador sólo actúa en las componentes espaciales x,y,z. Usando $[\varphi = \mathbb{A}\chi]$, y expresando

$$
\mathbb{A} = \mathbb{A}_0\, e^{-\frac{1}{2}\int dt \left(\frac{\dot{\sqrt{|{}^{(4)}g|}}}{\sqrt{|{}^{(4)}g|}} + \frac{\dot{g}^{tt}}{g^{tt}} \right)}, \tag{5.23}
$$

con $\mathbb{A}_0$ constante, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\chi} \quad - \quad & \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\dot{\sqrt{|{}^{(4)}g|}}}{\sqrt{|{}^{(4)}g|}} + \frac{\dot{g}^{tt}}{g^{tt}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\sqrt{|{}^{(4)}g|}}}{\sqrt{|{}^{(4)}g|}} + \frac{\dot{g}^{tt}}{g^{tt}} \right) \right] \chi + \\
+ \quad & \frac{\Lambda}{3} e^{-2\int dt \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} \nabla^2{}_r \chi - \frac{\Lambda}{3} \left(4\psi \chi_{,\psi} + \psi^2 \chi_{,\psi\psi} \right) |_{(\psi=cte)} = 0.
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

Proponemos la siguiente separación de variables $\chi \sim F_m(t)\, G_k(\vec{r})\, H_m(\psi)$. Luego se obtienen las ecuaciones para los modos sobre la hipersuperficie:

$$
H_m(\psi) \,|_{(\psi=cte)} = \kappa_m = cte, \tag{5.25}
$$

$$\nabla^2{}_r G_k(\vec{r}) + k^2 G_k(\vec{r}) = 0, \tag{5.26}$$

$$\ddot{F}_{km}(t) + \left\{ k^2 \left(\frac{\Lambda}{3} e^{-2\int dt \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}} \right) - \right.$$
$$\left. - \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\dot{\sqrt{|^{(4)}g|}}}{\sqrt{|^{(4)}g|}} + \frac{\dot{g}^{tt}}{g^{tt}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\sqrt{|^{(4)}g|}}}{\sqrt{|^{(4)}g|}} + \frac{\dot{g}^{tt}}{g^{tt}} \right) + \frac{m^2}{3}\Lambda \right] \right\} F_{km}(t) = 0. \tag{5.27}$$

Entonces, $\chi(t, \vec{r})$ puede ser reexpresada a través de la expansión de Fourier:

$$\chi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \left(a_k e^{i\vec{k}.\vec{r}} \xi_k(t) + a_k^\dagger e^{-i\vec{k}.\vec{r}} \xi_k^*(t) \right), \tag{5.28}$$

donde

$$\xi_k(t) = \int dm \, \kappa_m \, F_{km}(t). \tag{5.29}$$

Observando a través del conmutador de χ con $\dot{\chi}$ el aspecto concerniente a su naturaleza cuántica llegamos a una relación canónica $[\chi(\vec{r}, t), \dot{\chi}(\vec{r}', t)] = i\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$ que impone la condición de normalización:

$$\xi_k \dot{\xi}_k^* - \xi_k^* \dot{\xi}_k = i, \tag{5.30}$$

dando lugar a

$$\left[\varphi(t, \vec{r}), \Pi^0(t, \vec{r}')\right] = i g^{tt} \mathbb{A}_0^2 \sqrt{\frac{|^{(4)}g|}{|^{(4)}g_0|}} \, e^{-\int dt \left(\frac{\dot{\sqrt{|^{(4)}g|}}}{\sqrt{|^{(4)}g|}} + \frac{\dot{g}^{tt}}{g^{tt}} \right)} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'), \tag{5.31}$$

donde $g^{tt} = \frac{3}{\Lambda\psi^2}$.
Desde el punto de vista de Relatividad General, para el observador sobre un sistema comóvil y con $U^\psi = 0$, se cumple ${}^{(4)}g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta$ (con $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$), en el sistema comóvil, nos conduce a una ecuación de la forma

$${}^{(5)}g_{AB}U^A U^B = \frac{\psi^2\Lambda}{3} U^0 U^0 - \dot{\psi}^2 = \frac{\psi^2\Lambda}{3} U^0 U^0 = {}^{(4)}g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = 1, \tag{5.32}$$

debido a esto el principio de equivalencia se cumple en todo momento.

5.4 Desarrollo de la dinámica a través de una métrica 4D, en la que $\psi = \psi(t)$.

Estudiaremos ahora el caso en el cual se elige una foliación dinámica $\psi = \psi(t)$. Consideramos la acción dada por (5.20), sobre la métrica (5.5) con $\left[g^{\psi\psi} = -1\right]$. Las ecuaciones de Lagrange, cuando $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$, se escriben

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{,\mu}}\right) = 0, \tag{5.33}$$

siempre y cuando no existan fuerzas externas o elementos disipativos. La correspondiente dinámica viene dada por

$$\ddot{\varphi} + \left[\frac{3\dot{a}}{a} + \frac{\dot{g}_{tt}}{g_{tt}}\right]\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2{}_r \varphi}{a^2} - g_{tt}\left[\left(\frac{a'}{a} + \frac{{g_{tt}}'}{g_{tt}} + \frac{{g_{rr}}'}{g_{rr}}\right)\varphi' + \varphi''\right]\Bigg|_{\psi=\psi(t)} = 0. \tag{5.34}$$

5.4.1 Ecuaciones de movimiento para una métrica tetradimensional obtenida a partir de una foliación dinámica

La métrica 4D que efectiva luego de realizar la foliación dinámica $\psi = \psi(t)$ sobre la métrica (5.1), es

$$dS^2 = \left(\psi^2\,\frac{\Lambda(t)}{3} - \dot{\psi}^2\right)dt^2 - \psi^2\, e^{2\int dt \sqrt{\Lambda(t)/3}} d\vec{r}^{\,2}. \tag{5.35}$$

La ecuación de movimiento para el campo φ, será

$$\ddot{\varphi} + \left(3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{3\dot{\Lambda}}{2\Lambda} + \frac{2\dot{\psi}}{\psi}\right)\dot{\varphi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2_r\varphi - \frac{\Lambda}{3}\left(4\psi\varphi_{,\psi} + \psi^2\varphi_{,\psi\psi}\right)|_{(\psi=\psi(t))} = 0. \tag{5.36}$$

La ecuación (5.36), que describe la dinámica de φ, sobre la métrica efectiva (5.35) puede ser tratada mediante un cambio de variables $[\,\varphi = \mathbb{A}\chi\,]$, con

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 e^{-\frac{1}{2}\int dt\left(\sqrt{3\Lambda} - \frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda} + 2\frac{\dot{\psi}}{\psi}\right)}, \tag{5.37}$$

y se obtiene

$$\ddot{\chi} + \left\{\mathring{\mathbb{A}}\right\}\chi - \frac{1}{a^2}\nabla^2{}_r\chi - \frac{\Lambda}{3}\left(4\psi\chi_{,\psi} + \psi^2\chi_{,\psi\psi}\right)|_{(\psi=\psi(t))} = 0, \tag{5.38}$$

donde $\{\mathring{\mathbb{A}}\}$ viene dado por

$$\{\mathring{\mathbb{A}}\} = \frac{\ddot{\mathbb{A}}}{\mathbb{A}} + \frac{\dot{\mathbb{A}}}{\mathbb{A}}\left(3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda} + \frac{2\dot{\psi}}{\psi}\right). \tag{5.39}$$

Separando variables según $\chi \sim F_{km}(t)\, G_k(\vec{r})\, H_m(\psi)$, se obtiene

$$\nabla_r^2 G_k(\vec{r}) + k^2 G_k(\vec{r}) = 0, \tag{5.40}$$

$$m^2 L_m(\psi(t)) + L_{m,zz}(\psi(t)) = 0, \tag{5.41}$$

$$\ddot{F}_{km}(t) + \left[\frac{k^2}{a^2} - \left(\{\mathring{\mathbb{A}}\} - \left(\frac{m^2 + \frac{9}{4}}{3}\right)\Lambda\right)\right] F_{km}(t) = 0. \tag{5.42}$$

Tal que χ se puede escribir mediante una expansión en series de Fourier sobre la métrica efectiva (5.35), como

$$\chi(t, \vec{r}) = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int d^3k \left(a_k e^{i\vec{k}.\vec{r}} \xi_k(t) + a^{\dagger}{}_k e^{-i\vec{k}.\vec{r}} \xi_k^*(t)\right), \tag{5.43}$$

con

$$\xi_k(t) = \int dm L_m(\psi(t)) F_{km}(t). \tag{5.44}$$

Trabajando con esta expresión en el conmutador de χ con $\dot{\chi}$, a través de la relación canónica $[\chi(t,\vec{r}), \dot{\chi}(t,\vec{r}')] = i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}')$ obtenemos la normalización para los modos ξ_k, que es igual a la del caso con foliación estática

$$\xi_k \dot{\xi}_k^* - \xi_k^* \dot{\xi}_k = i. \tag{5.45}$$

Finalmente, se obtiene el conmutador

$$\left[\varphi(t,\vec{r}), \Pi^0(t,\vec{r}')\right] = i\mathbb{A}_0{}^2 g^{00} \sqrt{\frac{|{}^{(4)}g|}{|{}^{(4)}g_0|}}\, e^{-\int dt\left(3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda} + 2\frac{\dot{\psi}}{\psi}\right)} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'), \tag{5.46}$$

donde $\left[g^{00} = \frac{3}{\Lambda\psi^2 - 3\dot{\psi}^2}\right]$ y la expresión para $\left[{}^{(4)}g\right]$ está dada por la métrica (5.35),

$${}^{(4)}g = \left(\sqrt{\frac{\psi^2\Lambda(t)}{3} - \dot{\psi}^2}\right) \psi^3 e^{3\int dt \sqrt{\frac{\Lambda(t)}{3}}}. \tag{5.47}$$

5.4.2 Análisis de disipación y entropía ante la foliación $\psi = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$

El espacio 4D obtenido a partir de la foliación dinámica $[\psi = \psi(t)]$, sobre (5.1), viene dado por:

$$
\begin{aligned}
dS^2\big|_{\psi=\psi(t)} &= d\sigma^2 - \dot{\psi}^2 dt^2 \\
&\equiv \left[\psi^2(t)\frac{\Lambda}{3} - \dot{\psi}^2(t)\right] dt^2 - \psi^2(t)\, e^{2\int \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}dt}\, d\vec{r}^{\,2},
\end{aligned} \tag{5.48}
$$

donde la condición $\psi^2(t)\frac{\Lambda}{3} - \dot{\psi}^2 > 0$ implica un comportamiento Lorentziano, y $g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = 1$ ($U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dS}$) son las componentes de la tetra-velocidad).
Estudiaremos el comportamiento de φ en la hiper-superficie dada según

$$
d\sigma^2 = g_{\mu\nu}\left(t, \vec{r}, \psi(t)\right) dx^\mu dx^\nu \neq dS^2, \tag{5.49}
$$

en la que el principio de equivalencia se "rompe": $g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta \neq 1$. Más tarde volveremos sobre el significado de esta aparente ruptura, que en realidad implica un cambio en la interpretación de la covariancia de las leyes físicas. Por ahora es suficiente notar que el principio de equivalencia requiere un trato adecuado al referirnos a la inducción de una dinámica en 4D desde dimensiones extra.

Sean $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$ y $p = p_0 + \Delta p$, las densidades de energía y presión sobre $d\sigma^2$. Si $\rho_0(t)$ y $p_0(t)$ son densidad de energía y presión sobre (5.48), el sistema caracterizado por ρ_0 y p_0 describirá una expansión adiabática.

$$
\frac{d}{dt}\left[\rho_0\, a^3(t)\right] + p_0\, \frac{d}{dt}\left[a^3(t)\right] = 0. \tag{5.50}
$$

Por otro lado, dado que $d\sigma^2 \neq dS^2$, debe cumplirse

$$
\frac{d}{dt}\left[\rho_0\, a^3(t)\right] + p_0\, \frac{d}{dt}\left[a^3(t)\right] = \frac{T}{a^3(t)}\, \dot{\mathcal{S}} \neq 0. \tag{5.51}
$$

Si ahora consideramos las definiciones dadas para la densidad de energía y la presión, junto a la expresión (5.51), se obtiene

$$
\Delta\dot{\rho} + 3H\left(\Delta\rho + \Delta p\right) = \frac{T}{a^3(t)}\, \dot{\mathcal{S}}. \tag{5.52}
$$

Aquí, $\left[\, a(t) = \psi(t)\, e^{\int \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\, dt} \right]$, $[\, H(t) = \dot{a}/a\,]$, T es la temperatura del sistema de (5.48) y $\mathcal{S}$ su entropía.
Definimos $\gamma = 1 + \frac{\Delta p}{\Delta \rho}$. Entonces (5.52) se reescribe como

$$\Delta\dot{\rho} + 3H\,\gamma\,\Delta\rho = \frac{T}{a^3(t)}\,\dot{\mathcal{S}}. \tag{5.53}$$

Un caso de interés particular es $\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = 1/3$, donde podemos identificar $\Delta\rho$ y Δp con la densidad de radiación y su presión: $\Delta\rho \equiv \rho_r$ y $\Delta p \equiv p_r$. En este caso $\gamma = 4/3$

$$\dot{\rho}_r + 4H\,\rho_r = \delta, \tag{5.54}$$

donde la interacción $\delta \equiv \frac{T}{a^3(t)}\dot{\mathcal{S}} > 0$ está relacionada con la variación de entropía $\mathcal{S}$. Vemos que $\mathcal{S}$ aumenta con el tiempo, entonces los dos lados de (5.54) son positivos. Las ecuaciones de Lagrange para el sistema no conservativo son

$$\frac{\partial^{(4)}\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial^{(4)}\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\mu}} = F_{\rm ext}, \tag{5.55}$$

donde $F_{\rm ext} \sim \dot{\varphi}^2$, describe un término no conservativo, que puede relacionarse a una Lagrangiana de interacción. El origen de este término está dado por omitir $-\dot{\psi}^2\, dt^2$ de (5.48) en (5.49). Puede ser interpretado como una auto-interacción de φ sobre $d\sigma^2$. Esta auto-interacción puede verse como el origen de la disipación de φ en un baño termalizado. Consideremos el caso particular $\psi^2(t) = 3/\Lambda(t)$. Entonces:

$$d\sigma^2\Big|_{\psi=\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}} = dt^2 - \frac{3}{\Lambda}\, e^{2\int\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}dt}\, dr^2 \equiv dt^2 - a^2(t)\, dr^2. \tag{5.56}$$

La métrica efectiva 4D (5.48) es

$$dS^2\Big|_{\psi=\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}} = \left[1 - \frac{3}{\Lambda}\left(\frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda}\right)^2\right] dt^2 - \frac{3}{\Lambda}\, e^{2\int\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}dt}\, dr^2. \tag{5.57}$$

En este caso la dinámica del campo escalar sobre la métrica (5.57) es

$$
(5.58)\;\; \ddot{\varphi} + \left(3\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{\psi}}{\psi}\bigg|_{\psi=\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}} \right) \dot{\varphi} - \frac{1}{a^2}\nabla_r^2\varphi - \frac{\Lambda}{3}\left[4\psi\varphi_{,\psi} + \psi^2\varphi_{,\psi\psi}\right]\big|_{(\psi=\sqrt{\frac{3}{\Lambda}})} = 0.
$$

La ecuación de movimiento para $\varphi(t,\vec{r})$ en la métrica (5.56) inducida desde el 5D vacío, es

$$
(5.59) \qquad \ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} - \frac{1}{a^2}\,\nabla_r^2\varphi - \frac{\Lambda}{3}\left[4\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} + \psi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}\right]\bigg|_{\psi=\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}} = \frac{\delta}{\dot{\varphi}},
$$

donde la interacción δ es inducida por la dependencia temporal de la quinta coordenada en la brana (5.56). Los términos disipativos en la ecuación de movimiento para φ son inducidos por la dependencia temporal de g_{tt} en (5.57) omitida en (5.56). Por esta razón, la interacción δ depende de ψ y de $\dot{\psi}$

$$
(5.60) \qquad \delta = 2\,\frac{\dot{\psi}}{\psi}\dot{\varphi}^2 = \frac{T}{a^3(t)}\dot{\mathcal{S}} > 0.
$$

Podemos obtener la evolución temporal de la entropía en función de la quinta coordenada para $\psi(t) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$

$$
(5.61) \qquad \dot{\mathcal{S}} = -\left(\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right)\frac{a^3}{T}\,\dot{\varphi}^2 > 0.
$$

Esto significa que la función $\Lambda(t)$ decae con el tiempo: $\dot{\Lambda} < 0$.
Finalmente, la ecuación (5.59) describe la dinámica de φ en la métrica FRW (5.56), con $\psi = (3/\Lambda)^{1/2}$.

$$
(5.62) \qquad \ddot{\varphi} + \left[3\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right]\dot{\varphi} - \frac{1}{a^2}\,\nabla_r^2\varphi - \frac{\Lambda}{3}\left[4\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} + \psi^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}\right]\bigg|_{\psi=\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}} = 0,
$$

donde $\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\dot{\varphi}$ tiene una interpretación puramente disipativa en la brana (5.56) y describe la energía disipada por el campo inflatón en un baño de radiación termalizado.
Notemos que (5.54) es equivalente a (3.29) y (5.62) lo es a (3.27). Entonces

son las mismas ecuaciones que describen los escenarios de inflación tibia[17] y fresca[26] con un potencial auto-interactivo de Yukawa: $\delta = \Gamma\,\dot{\varphi}^2$ y con φ decayendo con: $\Gamma = 2\frac{\dot{\psi}}{\psi}\Big|_{\psi=\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}} = -\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}$. En estos escenarios la expansión acelerada del universo y la radiación de energía desde φ son producidas juntas durante el estadío inflacionario.

Usando el hecho de que ante el corrimiento al rojo la temperatura evoluciona según $T(t) = T_0\ [a_0/a(t)]$, entonces (5.61) puede reescribirse como

$$\dot{\mathcal{S}} = \frac{\Gamma\, a^4(t)}{T_0\, a_0}\,\dot{\varphi}^2 > 0, \tag{5.63}$$

donde T_0 es la temperatura de fondo a $t_0 < t$ y a_0 es el factor de escala actual. Este resultado es una generalización del obtenido por Hosoya y Sakagami[27] para una métrica FRW espacialmente plana usando teoría de campos cuánticos a temperatura finita.

Chapter 6

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos estudiado algunos aspectos fundamentales de la cosmología inflacionaria, desde las nociones más básicas sobre su formalismo hasta las teorías de materia inducida. Se ha tratado con particular atención el problema de un universo disipativo.

En el segundo capítulo establecimos los lineamientos básicos para la formulación de una teoría adecuada. Desarrollamos las herramientas que propias de la Teoría General de Relatividad, utilizada como piedra angular para cimentar la construcción de las teorías modernas. Mostramos los puntos centrales del modelo estándar, sus falencias y virtudes. Terminamos con la explicación de los parámetros cosmológicos más importantes, refiriéndonos a algunas cotas empíricas y su implicancia en la elaboración de un modelo. Finalmente se obtuvieon las condiciones elementales apropiadas a una construcción realista.

En el tercer capítulo nos abocamos al formalismo inflacionario, discutiendo los mecanismos que proveen a la formación de estructura a gran escala. Se dió particular importancia a la interpretación efectuada por Berera sobre éstos, a través de Inflación Tibia.

En el cuarto capítulo presentamos las teorías de dimensiones extras. Extendiéndonos sobre las ideas originales de Kaluza-Klein y Espacio-Tiempo-Materia en el enfoque de Mc Manus. Sobre este punto en particular pudimos reconstruir las ecuaciones de conservación de energía para una subfamilia de métricas FRW determinadas por una foliación desde el espacio 5D vacío (adiabático) y obtuvimos universos 4D "reversibles".

En el capítulo cinco utilizamos una métrica pentadimensional particular, que resulta Riemann-plana. Sobre ella desarrollamos la dinámica corresondiente al campo escalar en 5D. Trabajamos también las ecuaciones de movimiento para el campo escalar en dos métricas efectivas obtenidas por foliación. Ninguna de ellas

rompe el principio de equivalencia y las ecuaciones de movimiento resultantes representan, en ambos casos, un campo escalar en un universo adiabático.
Se describe también la dinámica sobre una brana tetradimensional que quiebra el principio de equivalencia perdiendo la naturaleza conservativa del espacio 5D. En el caso en que efectuamos la foliación $\psi = \left(\frac{3}{\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}}$, que también puede reinterpretarse como la redefinición de la constante cosmológica en función de una foliación $\psi = \psi(t)$, identificamos una estructura asimilable a la disipación propia de un baño termalizado. Obtenemos así un universo cuya dinámica es propia de Inflación Tibia, siendo además la entropía del sistema definida por la naturaleza geométrica del mismo[28]. La segunda ley de la termodinámica resulta consistente con una constante cosmológica para la cual $\dot{\Lambda} < 0$, que por otra parte es lo esperado de acuerdo a la evidencia observacional.
Con respecto al principio de equivalencia se puede decir, citando a P.S. Wesson[29]:

> "Cho y Park[30] (1991) han evaluado la masa gravitacional e inercial de un solitón, no desde 5D sino desde 7D. Ellos encontraron que sus valores eran diferentes, a primera vista esto indicaría "una obvia violación" del pricipio de equivalencia. Pero, en una discusión posterior argumentan que la penta-fuerza extra, asociada con la geometría extendida es responsable de la aparente violación, esto no debe describirse como una ruptura en el principio de equivalencia sino cómo una desviación de las leyes usuales(4D) de movimiento sobre geodésicas.
> Wesson (1996) revisa estos argumentos utilizando ecuaciones de movimiento [al igual que Cho y Park, en el campo de los solitones], llega a la conclusión de que el problema es sobre todo semántico: las relaciones que describen el movimiento geodésico en 5D no son, en general, las mismas que describen el movimiento geodésico en 4D, entonces los términos adicionales que provienen de 5D se ven como violaciones del principio de equivalencia en 4D."

En otras palabras, es natural que debamos reescribir el principio de equivalencia adaptándolo a los desarrollos de tipo STM. Puesto que es evidente que la ecuación de geodésicas pentadimensional homogénea que engendra una ecuación de geodésicas tetradimensional no-homogénea nos habla de otra interpretación para la covariancia de las leyes físicas. No la simple "traslación literal" de las expresiones de un espacio a otro. Ésta "traslación literal" sólo podrá efectuarse en aquellos casos en que las ecuaciones de movimiento para la parte 4D del universo 5D sean indistinguibles de aquellas propias del universo 4D. Esto ocurre en los casos previamente revisados desde nuestro espacio 5D caracterizado por (5.1), tanto para la foliación constante cómo para la foliación dinámica, cuyas

métricas efectivas están dadas por (5.21) y (5.34) respectivamente.
En añadidura, es de esperarse que $\left[{}^{(5)}g_{AB}U^A U^B =^{(4)} g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = 1 \right]$. No puede decirse lo mismo cuando abordamos la brana (5.49), obtenida al retringirnos a una hipersuperficie tetradimensional por la simple amputación a la métrica (5.1) del término referido a la quinta coordenada. Inmediatamente podemos comprobar que $\left[{}^{(5)}g_{AB}U^A U^B \neq^{(4)} g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta \right]$ y tendremos que reinterpretar el principio de equivalencia ligando esta diferencia a la pérdida de la homogeneidad de las ecuaciones geodésicas (2.12). Las trayectorias geodésicas corresponden a una generalización de las leyes de Newton, entonces lo que estamos viendo no es otra cosa que la aparición de un término no nulo del lado derecho de la ecuación de movimiento (2.12), que es una influencia externa surgida al restringirnos a la brana. En este trabajo esto resulta asociado a un efecto disipativo para φ.
En este sentido es un abuso semántico referirnos a "ruptura" del principio de equivalencia, cuando deberíamos hablar de una reinterpretación.

Bibliography

[1] A. Einstein, Die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie, Ann. Der Physik, ser 4, VFB 49, 769 (1916);
M. Paty, "Einstein y el Rol de las Matemáticas en la Física", Conferencia en el "Seminario Paulista de Historia e de Educaçao Matemática", Instituto de Matemática y Estadística, Sao Paulo, octubre de 2005, Ed. Praxis Filosófica nro.22, 5 (2006).

[2] P. Kreszberg, The invented Universe: "The Einstein-De Sitter Controversy (1916-17) and The Rise of Relativistic Cosmology", Ed. Oxford University Press (1989).

[3] E. A. Tropp, V. Y. Frenkel, A. D. Chernin, "Alexander A. Friedmann: The Man Who Made the Universe Expand", Ed. Cambridge University Press, (1993).

[4] G. Lamaître, Ann. Soc. Sci. Bruxelles A47, 49 (1927).

[5] G. Gamow, Phys. Rev.70, 572 (1946);
R. A. Alpher and R. C. Herman, Phys. Rev.74, 1738 (1948);
R. A. Alpher, R. C. Herman, Phys. Rev.75, 1089 (1949);
V. M. Mukhanov, Physical Foundations of Cosmology, Ed. Cambridge University Press, 72 (2005).

[6] A. D. Linde, Phys. Lett. B108, 389 (1982);
A. D. Linde, Phys. Lett. B114, 431 (1982);
A. D. Linde, Phys. Lett. B116, 335 (1982);
A. D. Linde, Phys. Lett. B116, 340 (1982).

[7] R. M. Wald, General Relativity, Ed. The University of Chicago Press (1984);
J. Stewart, Advanced General Relativity, Ed. Cambridge University Press (1991);
S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Ed. John Wiley and Sons Inc. (1972).

[8] D. Langlois, Lectures given at Cargese School of Particle Physics and Cosmology, Ed. Cargese (2004) [arXiv: hep-th/0405053].

[9] V. M. Slipher, Pop. Astr. 21,23 (1915);
K. Lundmark, MNRAS 84,747 (1924);
E. Hubble, M. L. Humanson, Ap. J. 43,74 (1931).

[10] J. E. Madriz Aguilar, Tesis Doctoral, Universidad Michoacana de San Nicolas Hidalgo, c.2 (2006).

[11] A. A. Starobinsky, JETP Lett.30, 682 (1979);
A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B91, 99 (1980);
A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B117, 175 (1981).

[12] Y. B. Zel'dovich, Sov. Astron. Lett.7, 332 (1981);
E. P. Tryon, Nature 246, 396 (1973).

[13] A. H. Guth, Phys. Rev. D23, 347 (1981).

[14] A. D. Linde, Phys. Lett. B108, 389 (1982);
A. D. Linde, Phys. Lett. B114, 431 (1982);
A. D. Linde, Phys. Lett. B116, 335 (1982);
A. D. Linde, Phys. Lett. B116, 340 (1982);
A. Albrecht, J. P. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 48, 1220(1982);
A. H. Guth, J. P. Steinhardt, Sci. Am. p.90 (may 1984).

[15] García Bellido, A. D. Linde, Phys. Rev. D50, 730 (1994);
A. D. Linde, Phys. Rev. D50, 2456 (1994).

[16] M. Bellini, Notas de Introducción a la Cosmología (curso 2007).

[17] A. Berera, Li-Zhi Fang, Thermally Induced Density Perturbations in the Inflation Era, Phys. Rev. Lett. 74, 1912 (1995);
A.Berera, Li-Zhi Fang, Warm Inflation, Phy. Rev. Lett. 75, 3218 (1995).

[18] G. Nordtröm, Phys. Zeitschr 15, 504 (1914).

[19] T. Kaluza, Sitz. Pr. Akad. Wiss. 33, Phys. Math. k1, 996 (1921).

[20] O. Klein, Z. F. Physik 37, 895 (1926);
O. Klein, Nature 118, 516 (1926).

[21] B. Riemann, Abh. Konigl. gesellsch. 13, 1 (1868);
L. Schlafli, Ann. di Mat. 2da serie 5, 170 (1871);
L. Magaard, Ph. D. thesis, Kiel (1963).

[22] P. S. Wesson, Space-Time-Matter, Ed. World Scientific (1999);
P. S. Wesson, J. Ponce de Leon, J. Math. Phys. 33, 3883 (1992);
P. S. Wesson, J. Ponce de Leon, J. Math. Phys. 34, 4080 (1993);
J. Ponce de Leon, Gen. Rel. Grav. 20, 539 (1988).

[23] D. J. Mc Manus, Five-dimensional Cosmological Models in Induced Matter Theory, J. Math. Phys. 35, 4889 (1994).

[24] M. Bellini, Phys. Lett. B632,610 (2006).

[25] M. Anabitarte, M. Bellini, Space Time Matter Inflation, J. Math. Phys. 47, 042502 (2006) [arXiv:gr-qc/0509002v2];
A. Membiela, M. Bellini, Quintessential Inflation From Variable Cosmological Constant in a 5D Vacuum, Phys. Lett. B641,125 (2007) [arXiv:gr-qc/0606119v3].

[26] M. Bellini, Fresh Inflationary Model From Zero Temperature Initial State, Phys. Rev. D63, 123510 (2001) [arXiv:gr-qc/0101062v3].

[27] A. Hosoya, M. Sakagami. Phys. Rev. D29, 2228 (1984).

[28] M. Bellini, J. Romero, Origin of the Inflation Field Dissipative Dynamics From the STM Theory of Gravity, enviado a Il Nuovo Cimento, (2008).

[29] P. S: Wesson, Phys. Lett.B, v381, 420 (1996);
P. S. Wesson, Space-Time-Matter, Ed. World Scientific, 87 (1999);
P. S. Wesson, Gen. Rel. Grav. , The Equivalence Principle as a Symmetry, Ed. Springer Netherlands, V35, nro.2, 307 (2003);
P. S. Wesson, The Equivalence Principle as a Probe for Higher Dimensions, Int. J. of Mod. Phys. D, v14 (diciembre de 2005).

[30] Y. M. Cho, D. H. Park, Gen. Rel. Grav. , Re-Ed. Springer Netherlands, nro.23, 741 (2003), (orig. 1991);
Y. M. Cho, D. H. Park, A Class Kaluza Klein Soliton Solutions, Phys. Lett. B, 420 (1996);
Y. M. Cho, Electronic J. "Quantum Violation of the Equivalence Principle in Brans", 2963 (1997).

[31] P. J. E. Peebles, Principles of Physical Cosmology, Ed. Princeton University Press (1993).

[32] M. Ludvigsen, General Relativity, a Geometric Approach, Ed. Cambridge University Press (2000).

[33] M. Bellini, Phys. Lett. B428, 31 (1998);
M. Bellini, Phys. Rev. D58, 103518 (1998);
M. Bellini, Phys. Rev. D63, 123510 (2001);
M. Bellini, Phys. Rev. D64, 123508 (2001);
M. Bellini, Phys. Rev. D67, 027303 (2003).

[34] C. W. Misner, J. A. Wheeler, K. S. Thorne, Gravitation, Ed. Freeman and co. San Francisco (1973).