

# FLUCTUACIONES DE CAMPOS ESCALARES DURANTE INFLACIÓN DESDE UN VACÍO 5D

Autor: Federico Agustín Membiela  
Director: Dr. Mauricio Bellini

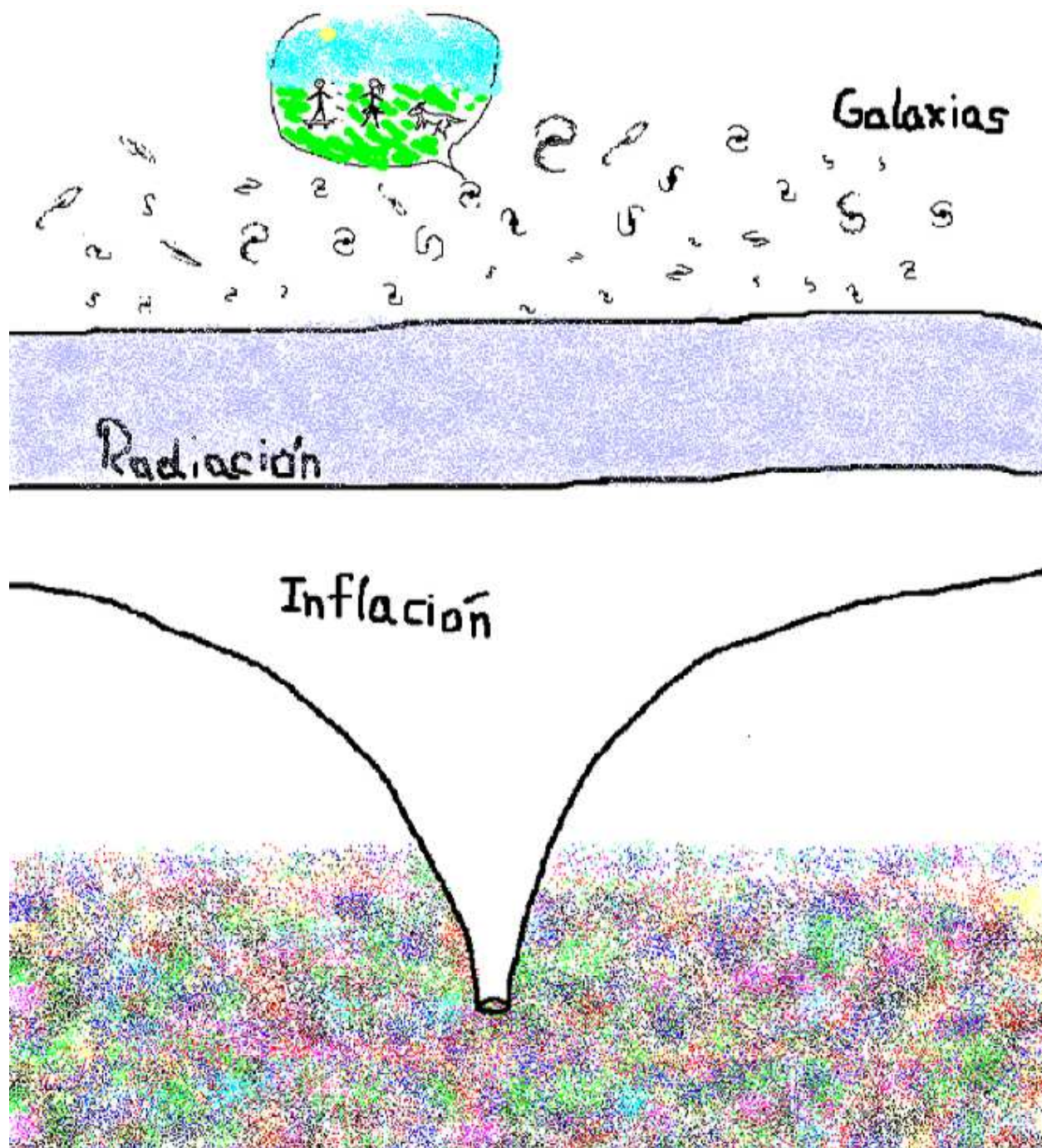
Departamento de Física,  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,  
Universidad Nacional de Mar del Plata,  
Deán Funes 3350, (7600) Mar del Plata,  
Buenos Aires, Argentina.

Febrero de 2007

*a mis queridos abuelos*

*Inés y Juan Carlos*

*Amalia y Cholo*



# Introducción

Desde hace algunos años, las teorías de dimensiones extra han pasado a ser parte activa de la física de partículas, relatividad general y cosmología, en un intento de unificar la gravedad con las otras fuerzas de la naturaleza. A tal punto, que en este momento se están llevando a cabo (y se proyectan en un futuro cercano) experimentos cuyo principal objetivo es detectar indicios de dimensiones extras. En estas teorías de unificación  $(4+d)$ -dimensionales las  $d$ -dimensiones tipo espacio generalmente son compactificadas espontáneamente y las simetrías de este espacio aparecen como simetrías de gauge de la teoría efectiva 4D. A su vez, la idea de que el universo pueda ser de múltiples dimensiones ha generado un gran interés por teorías donde la gravedad es una interacción que excede el 4-espacio. En estas teorías las dimensiones extra son extendidas. Estas usualmente son denominadas teorías de Kaluza-Klein no compactas. Los modelos de Brane-World (BW) son inspirados por este tipo de teorías. En estos modelos nuestro universo es una hipersuperficie de cuatro dimensiones (brane) dentro del espacio-tiempo de cinco dimensiones (bulk).

Paralelamente, existe otra versión de Kaluza-Klein no compacta: la teoría de Materia Inducida (TMI) o de Espacio-Tiempo-Materia (STM). En este caso, nuestro mundo 4D está inmerso en un universo 5D, que es una solución de las ecuaciones extendidas de Einstein en el vacío. Sin embargo, originalmente la motivación en esta teoría era lograr la unificación de la materia con la geometría, es decir, obtener las propiedades de la materia como consecuencia de las dimensiones extra.

Aunque TMI y BW tienen diferentes motivaciones para introducir una dimensión extra extendida, comparten el mismo esquema de trabajo. Sin embargo, en ambos casos se adoptan técnicas diferentes: en TMI se construye la física 4D a partir de 5D, mientras que en BW se construye el universo 5D a partir de la física 4D. Recientemente fue sugerida una conciliación muy interesante entre las partes [52].

El objetivo de la tesis es el estudio de las fluctuaciones primordiales del

universo desde una teoría de Kaluza-Klein, donde la coordenada extra se considera no compacta. El período más natural durante el cual se crean estas fluctuaciones es el de inflación. En ese sentido, nos concentramos en una expansión de *de Sitter* efectiva del universo 4D. Este trabajo ya había sido desarrollado, aunque en forma parcial [56].

La tesis fue estructurada en cuatro capítulos. Los tres primeros tiene el objetivo de introducir los conceptos básicos para que el estudio del cuarto capítulo sea autocontenido.

El primer capítulo está dedicado a las teorías del Big-Bang e inflación, que conjuntamente establecen el actual modelo cosmológico estándar. Aquí se incluyen: definiciones de relatividad general; algunos conceptos de los modelos cosmológicos, isótropos y homogéneos, de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) y un breve resumen de la evolución térmica del universo. Posteriormente se analizan: los problemas de la teoría del Big-Bang que sirven de motivaciones para la teoría de inflación; los requisitos para inflación y la necesidad del campo escalar; los primeros modelos de inflación; y finalmente el modelo más aceptado: inflación caótica.

El segundo capítulo está dedicado a repasar la teoría lineal de las perturbaciones cosmológicas. Comenzamos con perturbaciones débiles o Newtonianas en un espacio-tiempo estático, para seguir con un universo en expansión. A continuación estudiamos las perturbaciones cosmológicas de gran escala, lo cual hace necesario un análisis relativista; se define además el concepto de invariancia de gauge. Finalmente, y con la idea de estudiar la física del universo temprano, analizamos la naturaleza cuántica de las fluctuaciones de los campos cosmológicos, pero evitando una teoría de gravedad cuántica.

El tercer capítulo es sobre la teoría de Materia Inducida o de Espacio-Tiempo-Materia, que junto con la teoría de branas es considerada como una teoría de Kaluza-Klein no compacta. Además, estudiamos sus orígenes y fundamentos, junto con una aplicación concreta y general. Finalmente, estudiamos una versión de inflación en este contexto.

En el cuarto capítulo completamos el objetivo principal de la tesis.

Finalmente se incluye un resumen, algunas conclusiones finales y la bibliografía.

# Contents

<b>1</b>	<b>Cosmología Estándar:</b>	
	<b>Inflación + Big-Bang</b>	<b>7</b>
1.1	Introducción a la teoría del Big-Bang . . . . .	7
1.1.1	Elementos de relatividad general . . . . .	8
1.1.2	Cosmología de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	11
1.1.3	Análisis termodinámico . . . . .	16
1.1.4	Historia térmica del universo . . . . .	17
1.1.5	Los horizontes cosmológicos . . . . .	20
1.2	Inflación del universo . . . . .	21
1.2.1	Problemas en la teoría del Big-Bang caliente . . . . .	21
1.2.2	Fundamentos de inflación . . . . .	24
1.2.3	El campo inflatón . . . . .	26
1.2.4	Reseña histórica de inflación . . . . .	27
1.2.5	Fenomenología de inflación caótica . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Teoría lineal de perturbaciones cosmológicas</b>	<b>33</b>
2.1	Perturbaciones Cosmológicas Newtonianas . . . . .	33
2.1.1	Introducción . . . . .	33
2.1.2	Perturbaciones en un espacio-tiempo de Minkowski . . . . .	34
2.1.3	Perturbaciones en un fondo en expansión . . . . .	36
2.1.4	Caracterización de las perturbaciones . . . . .	39
2.2	Perturbaciones cosmológicas relativistas . . . . .	41
2.2.1	Introducción . . . . .	41
2.2.2	Clasificación de las fluctuaciones . . . . .	42
2.2.3	Transformaciones de Gauge . . . . .	44
2.2.4	Ecuaciones dinámicas . . . . .	46
2.3	Teoría cuántica de las fluctuaciones de campos cosmológicos . . . . .	49
2.3.1	Campo escalar sin masa en un de Sitter . . . . .	50

2.3.2	Fluctuaciones cuánticas con perturbaciones de la métrica . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Teoría de Kaluza-Klein No-compacta</b>	<b>56</b>
3.1	Fundamentos de la Teoría de Kaluza-Klein . . . . .	57
3.2	Axiomas de TMI . . . . .	62
3.2.1	Una aplicación general de TMI . . . . .	66
3.3	Inflación desde TMI . . . . .	69
3.3.1	Formalismo 5D . . . . .	70
3.3.2	Expansión de Sitter 4D efectiva . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Fluctuaciones cosmológicas en TMI</b>	<b>77</b>
4.1	Acciones, métricas y ecuaciones de movimiento en un vacío 5D	77
4.1.1	Acción . . . . .	77
4.1.2	Métrica . . . . .	78
4.1.3	Ecuaciones de movimiento para $\varphi$ y $\Phi$ . . . . .	81
4.1.4	Ecuaciones de Einstein en 5D . . . . .	83
4.2	Cuantificación y normalización de las fluctuaciones cosmológicas en un vacío 5D . . . . .	84
4.2.1	Normalización de $\Phi$ en 5D . . . . .	84
4.2.2	Separación de variables del campo de fondo $\varphi_b$ y ecuación inhomogénea para $\delta\varphi$ . . . . .	86
4.2.3	Normalización de $\delta\varphi$ en 5D . . . . .	87
4.3	de Sitter efectivo en 4D . . . . .	89
4.3.1	Métrica efectiva . . . . .	89
4.3.2	Dinámica de $\varphi$ y $\Phi$ en una expansión de Sitter efectiva 4D . . . . .	90
4.3.3	Fluctuaciones en la densidad de energía y su espectro	92

# Chapter 1

## Cosmología Estándar: Inflación + Big-Bang

### 1.1 Introducción a la teoría del Big-Bang

Nuestro esquema actual de lo que es el universo se basa en la teoría del Big-Bang caliente (BBc), que explica su evolución desde la primera fracción de segundo hasta la época actual, alrededor de 14 mil millones de años después. Esta teoría se apoya en cuatro fuertes pilares, un marco teórico conformado por la relatividad general, desarrollado por Albert Einstein [1] y Alexander Friedmann [2] en los 1920s, y tres hechos observacionales: Primero, la expansión del universo, descubierta por Edwin P.Hubble [3] en los 1930s, a partir de la proporcionalidad de la velocidad de recesión de las galaxias con la distancia relativa a nosotros. Segundo, la abundancia relativa de los elementos livianos, explicada por George Gamow [4] en los 1940s, específicamente la del helio, deuterio y litio, que fueron cocinados a partir de las reacciones nucleares que habrían tenido lugar a partir del primer segundo hasta unos minutos después del Big-Bang, cuando el universo era unas pocas veces mas caliente que el núcleo del sol. Tercero, la radiación de fondo de microondas (CMB), la "mejor fotografía" del Big-Bang, descubierta en 1965 por Arno Penzias y Robert Wilson [5], como radiación de cuerpo negro muy isotrópica a una temperatura de aproximadamente 3 grados Kelvin, emitida cuando el universo era lo suficientemente frío como para dar lugar a átomos neutros, y fotones desacoplados de la materia, aproximadamente 500.000 años después del Big Bang. Actualmente, estas observaciones están confirmadas con un gran certeza por lo que han establecido al BBc como el mejor modelo del



universo.

Para la elaboración de este capítulo se utilizaron principalmente los libros: *Introduction to Modern Cosmology* de A.R.Liddle(2003), *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* de A.R.Liddle y D.H.Lyth (2000), *Cosmology-The Origin and Evolution of Cosmic Structure* de P.Coles y F.Lucchin (2002), y las notas de J.García-Bellido *Astrophysics and Cosmology*(2000).

### 1.1.1 Elementos de relatividad general

La cosmología moderna se basa en la teoría de la relatividad general de Einstein. En este apartado presentaremos brevemente las definiciones básicas de esta teoría finalizando con las ecuaciones de Einstein.

En relatividad general (RG), la geometría del espacio-tiempo es definida por una **métrica** o **tensor métrico**, un tensor simétrico de segundo orden (dos índices), cuyas componentes en un sistema de coordenadas  $\{x^\mu\}$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) se denotan por  $g_{\mu\nu}$ . El elemento de línea cuadrático del espacio-tiempo esta dado por la expresión

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.1)$$

Se usará la signatura  $(-, +, +, +)$ .

Ante un cambio de coordenadas  $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$ , las nuevas componentes de la métrica se obtienen a través de la transformación

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\rho\lambda}. \quad (1.2)$$

Se puede definir una **derivada covariante** asociada a esta métrica, denotada por un punto y coma, mientras que la derivada ordinaria la denotaremos por una coma. Por ejemplo, aplicada a un tensor mixto de segundo orden resulta

$$T^\mu_{\nu;\lambda} = T^\mu_{\nu,\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\pi} T^\pi_\nu - \Gamma^\pi_{\lambda\nu} T^\mu_\pi \quad (1.3)$$

donde  $\Gamma$  son los símbolos de Christoffel de segunda especie (que no son tensores), definidos por

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\pi}}{2} (g_{\pi\nu,\mu} + g_{\mu\pi,\nu} - g_{\mu\nu,\pi}) \quad (1.4)$$

Aquí  $g^{\mu\nu}$  es el **tensor métrico contravariante** que resulta ser la inversa del covariante  $g_{\mu\nu}$  en el sentido matricial, es decir  $g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$ .

La curvatura del espacio-tiempo es caracterizada completamente por el **tensor de Riemann**, cuyas componentes pueden expresarse en términos de los símbolos de Christoffel de acuerdo a

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\lambda\nu,\mu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\rho} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\pi}\Gamma_{\pi\mu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\pi}\Gamma_{\pi\lambda}^{\rho}. \quad (1.5)$$

Las ecuaciones de Einstein relacionan la geometría de espacio-tiempo con la materia y energía contenida en él. Así la geometría aparece en las ecuaciones de Einstein a través del **tensor de Ricci**, definido por

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho}, \quad (1.6)$$

y el **escalar de curvatura**, que es la traza del tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Por otro lado, la materia aparece en las ecuaciones de Einstein a través del **tensor de energía-impulso**  $T_{\mu}^{\nu}$ , cuya componente tiempo-tiempo se relaciona con la densidad de energía  $\rho$ , las componentes tiempo-espacio con la densidad de momento  $g^i$  y las componentes espacio-espacio con el tensor de tensiones  $\pi^{ij}$ . Las ecuaciones de Einstein son por construcción

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el **tensor de Einstein** tal que su divergencia es nula  $G_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$ , por lo que cualquier tensor de energía-momento cumplirá

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0, \quad (1.9)$$

que consiste en una generalización a espacio-tiempos curvos de la ley de conservación para la energía y el momento.

La trayectoria  $x^\mu(\lambda)$  de una partícula libre en el espacio-tiempo (que no siente otra fuerza que la gravitatoria) satisface la **ecuación de geodésicas**

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (1.10)$$

Esta ecuación puede aplicarse a:

- ★ partículas masivas, en cuyo caso el parámetro  $\lambda$  es el tiempo propio por lo que el vector tangente  $u^\mu$  está normalizado:  $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$
- ★ partículas sin masa, fotones por ejemplo, en cuyo caso el vector tangente  $k^\mu$  es tipo luz, por lo que  $g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$ .

La ecuación de geodésicas se deduce a partir de principios variacionales. Por otro lado las ecuaciones de Einstein pueden obtenerse también a partir de un principio variacional. La acción correspondiente es

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat}, \quad (1.11)$$

donde la variación se realiza respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$ , y haciendo la identificación

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat})}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (1.12)$$

se obtienen las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (1.13)$$

Aquí se ha incluido una **constante cosmológica**  $\Lambda$ . Es interesante notar que la constante cosmológica puede interpretarse como una parte del tensor de energía-momento de la forma

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\frac{1}{8\pi G} \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.14)$$

que puede asociarse a energía oscura.

## 1.1.2 Cosmología de Friedmann-Robertson-Walker

Las ecuaciones de Einstein [1.13] son no lineales y resultan ser casi imposibles de resolver sin utilizar simplificaciones justificadas por simetrías del modelo en cuestión. En la época entre 1917 y 1922 el universo observado por los telescopios parecía extenderse unos cientos de miles de parsecs (1 parsec = 3.26 años luz), hasta las galaxias del grupo local, Andrómeda y las Nubes de Magallanes. El universo parecía extremadamente anisotrópico. Sin embargo, Einstein y Friedmann supusieron que la simetría más razonable del universo a gran escala debería ser la homogeneidad en todos los puntos y por lo tanto la isotropía. A esta suposición se la denomina **principio cosmológico**. Este principio puede considerarse como una extensión del principio copernicano en el sentido de que equivale a decir que todas las posiciones espaciales en el universo son esencialmente equivalentes. Este principio fue confirmado experimentalmente con el descubrimiento de la radiación de fondo de microondas.

El principio cosmológico es muy restrictivo y las únicas métricas compatibles con él son las métricas del tipo Friedmann- Robertson-Walker (FRW). En el sistema de coordenadas locales estas métricas toman la forma

$$ds^2 = dt^2 - a_{(t)}^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1.15)$$

que son caracterizadas por dos cantidades: el *factor de escala*  $a_{(t)}$ , que determina el tamaño físico de las coordenadas, y una constante  $K$ , que caracteriza la *curvatura espacial*

$${}^{(3)}R = \frac{6K}{a^2(t)}, \quad \text{donde } \begin{cases} K = -1 & \text{ABIERTO} \\ K = 0 & \text{PLANO} \\ K = 1 & \text{CERRADO} \end{cases} \quad (1.16)$$

Aparte de la curvatura espacial 3D, puede hallarse la curvatura del espacio-tiempo, que está dada por el escalar de Ricci

$${}^{(4)}R = 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + {}^{(3)}R. \quad (1.17)$$

Dependiendo de la dinámica (y por lo tanto del contenido de materia y energía) del universo, se tendrán diferentes evoluciones. El universo puede

expandirse indefinidamente, recolapsar en el futuro, o alcanzar un estado asintótico estático.

En 1929, Edwin Hubble observó un corrimiento al rojo de los espectros de las galaxias lejanas, que indicaba que se alejaban de nosotros a una velocidad proporcional a la distancia. Esto fue interpretado correctamente como debido a una expansión del universo. Es decir, que el factor de escala actual es mas grande que cuando los fotones fueron emitidos de las galaxias. El factor de escala  $a(t)$  determina el tamaño físico de las coordenadas espaciales, por lo que la expansión del universo no es mas que un cambio de escala -de las unidades espaciales- con el tiempo. Excepto por las *velocidades peculiares*, esto es, movimiento debido a la atracción de la materia, las galaxias no se mueven en las coordenadas espaciales, es el espacio-tiempo el que se "estira" entre ellas. Se dice que las galaxias están en comovimiento con la expansión del universo. Generalmente es conveniente elegir observadores **comóviles** con la expansión del universo, especificados a través de su 4-velocidad  $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . Las partículas comóviles (o galaxias) satisfacen la ecuación de geodésicas (1.10). Debido al continuo estiramiento, las longitudes de onda observadas de los fotones que vienen de objetos distantes es mayor que las emitidas por un factor igual a la proporción entre los factores de escala de emisión y recepción,

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} = \frac{a_0}{a} \equiv 1 + z, \quad (1.18)$$

donde  $a_0$  es el valor actual. Como el universo actual es mayor que en el pasado, las longitudes de onda son corridas hacia el rojo, por una cantidad caracterizada por  $z$ , el *parámetro de corrimiento al rojo*.

Puede resultar desconcertante como podemos observar el estiramiento del espacio-tiempo. Si todas las distancias son escaleadas por un factor de escala universal, luego nuestras reglas también deberían ser estiradas, y por lo tanto no habría diferencias al comparar dos distancias a tiempos diferentes (por ejemplo dos longitudes de onda). La razón del porque se observa una diferencia, radica en que vivimos en un sistema ligado gravitacionalmente, localmente desacoplado de la expansión del universo. Es decir, las coordenadas espaciales locales en este sistema no son estiradas por la expansión, ya que el espacio-tiempo local de un sistema ligado gravitacionalmente es descrito por una métrica estática de Schwarzschild [6]. En cambio, entre galaxias, las longitudes de onda de los fotones son estiradas a lo largo

de su trayectoria geodésica de una galaxia a otra. En este esquema cosmológico, las galaxias se comportan como partículas puntuales, moviéndose en un "fluido" en el espacio-tiempo en expansión.

Hasta ahora nos hemos ocupado de los aspectos geométricos del espacio-tiempo. Es decir del lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein. Consideremos ahora el contenido de energía y materia de nuestro universo. Para ser consistentes con nuestro principio cosmológico deberíamos considerar un fluido perfecto que llena el espacio. De forma tal que cualquier observador comóvil con el fluido apreciaría un universo isotrópico. El tensor de energía-momento de este tipo de fluido puede escribirse como

$$T_{\nu}^{\mu} = (p + \rho)U^{\mu}U_{\nu} - p \delta_{\nu}^{\mu}, \quad (1.19)$$

donde  $p(t)$  y  $\rho(t)$  son la presión y densidad de energía del fluido, y  $U^{\mu}$  es la 4-velocidad comóvil, que satisface  $U^{\mu}U_{\mu} = -1$ .

Las ecuaciones de movimiento de este fluido en el universo en expansión están dadas, según la relatividad general, por las ecuaciones de Einstein (1.13), al sustituir en ellas la métrica de FRW (1.15) y el tensor del fluido perfecto (1.19). La componente  $\mu = \nu = 0$  de las ecuaciones de Einstein constituyen la ecuación de Friedmann

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (1.20)$$

donde  $H$  es el parámetro de Hubble. La constante cosmológica  $\Lambda$  aparece como una forma de materia. Actualmente, en el contexto de la teoría cuántica de campos, puede asociarse a la energía de vacío, aunque no puede comprenderse porque tiene un valor tan bajo (120 ordenes de magnitud por debajo de la predicha por la teoría cuántica). Este constituye uno de los problemas fundamentales de la física contemporánea, además de la cosmología.

De las demás componentes se obtiene la ecuación

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (1.21)$$

Una consecuencia de estas dos ecuaciones es la ecuación de continuidad. Implícita en la conservación de la energía ( $T_{\mu;\nu}^{\nu} = 0$ ), dada por la covariancia de la teoría ( $G_{\mu;\nu}^{\nu} = 0$ ).

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt}(a^3) = 0, \quad (1.22)$$

donde la densidad de energía y la presión pueden, en principio, descomponerse en materia y radiación,  $\rho = \rho_m + \rho_r$ ,  $p = p_m + p_r$ . Cuando una sola componente domina en la densidad de energía total, cada una de ellas se distingue por una ecuación de estado de la forma  $p = \omega\rho$ , donde  $\omega$  es el parámetro de estado que caracteriza a la componente dominante en turno. Aunque en el modelo estándar  $\omega$  es considerada una constante, en la actualidad existen modelos que trabajan con  $\omega = \omega(t)$ . Esta ecuación de estado incluye los dos principales tipos de materia en cosmología estándar, el gas de partículas relativistas que corresponde a  $\omega = 1/3$ , y la materia no relativista determinada por  $\omega = 0$ . En ambos casos la ecuación de conservación anterior puede integrarse para dar

$$\rho \sim a^{-3(1+\omega)}. \quad (1.23)$$

De la ecuación de Friedmann (1.20), considerando  $\Lambda = 0$  y  $K = 0$  se obtiene una ecuación de movimiento para el factor de escala  $\dot{a}^2 \sim a^{2-3(1+\omega)}$ . Luego, se obtienen las siguientes soluciones particulares

$$\text{RADIACIÓN:} \quad a(t) \sim t^{1/2}, \quad (1.24)$$

$$\text{MATERIA:} \quad a(t) \sim t^{2/3}. \quad (1.25)$$

Si la componente dominante corresponde a energía de vacío  $V_0$ , esta debe actuar como una constante cosmológica con  $\Lambda = 8\pi G V_0$  y una ecuación de estado resultante  $p = -\rho$ . En este caso tenemos una expansión exponencial del universo

$$a(t) \sim e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \quad (1.26)$$

Mas generalmente, cuando coexisten distintos tipos de materia con ecuaciones de estado  $p_{(i)} = \omega_{(i)}\rho_{(i)}$ , es conveniente introducir el parámetro adimensional

$$\Omega_{(i)} = \frac{8\pi G \rho_0^{(i)}}{3H_0^2}, \quad (1.27)$$

que expresa la relación actual entre la densidad de energía de la  $i$ -ésima especie respecto a la **densidad de energía crítica**

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (1.28)$$

que no es otra cosa que la densidad de energía total de un universo plano.

Podemos reescribir la ecuación de Friedmann (1.20) como

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \sum_i \Omega_{(i)} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+\omega_{(i)})} + \Omega_K \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2}, \quad (1.29)$$

donde  $\Omega_K = -K/(a_0 H_0)^2$ . Esto implica que los parámetros cosmológicos deben satisfacer la relación de consistencia

$$\sum_i \Omega_{(i)} + \Omega_K = 1. \quad (1.30)$$

La otra ecuación de movimiento (1.21), implica

$$q_0 \equiv -\left.\frac{\ddot{a}}{aH^2}\right|_0 = \frac{1}{2} \sum_i \Omega_{(i)} (1 + \omega_{(i)}) \quad (1.31)$$

donde  $q_0$  es el parámetro de desaceleración del universo actual. Si  $q < 0$  el universo se encuentra en una etapa acelerada, en cambio si  $q > 0$  el universo se está desacelerando.

Las observaciones recientes han determinado varias especies

- Bariones:  $\Omega_b \simeq 0.05$ .
- Materia oscura:  $\Omega_d \simeq 0.25$
- Energía oscura (compatible con una constante cosmológica):  $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$
- Fotones:  $\Omega_\gamma \simeq 5 \times 10^{-5}$

Tampoco se ha detectado una desviación de la planaridad. La radiación es muy poco dominante actualmente, pero regresando hacia atrás en el tiempo debería haberlo sido ya que su energía es escaleada como  $a^{-4}$  en contraste con la de materia que va como  $a^{-3}$ . Es más, como la presente composición del universo es dominada por la energía oscura, similar a una constante cosmológica ( $\omega_\Lambda = -1$ ), esto indica que actualmente el universo se encuentra en una fase de aceleración.



### 1.1.3 Análisis termodinámico

Es importante establecer una analogía entre la ecuación de conservación de la energía (1.22) y la segunda ley de la termodinámica para introducir el concepto de temperatura,

$$TdS = dU + pdV, \quad (1.32)$$

donde  $U = \rho V$  es la energía total del sistema cerrado y  $V = a^3$  es el volumen físico. La ecuación (1.22) implica que la expansión del universo es adiabática o isoentrópica ( $dS = 0$ ), correspondiente a un fluido en equilibrio térmico a una temperatura  $T$ . Para un fluido que satisface la ecuación de estado  $p = \omega\rho$ , podemos escribir la evolución de la densidad de energía en la forma

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{d}{dt}(a^3) = -3H\omega(\rho a^3). \quad (1.33)$$

Para partículas relativistas en equilibrio térmico, la traza del tensor de energía-impulso es nula y por lo tanto  $p_R = \rho_R/3 \Rightarrow \omega = 1/3$ . En este caso, la densidad de energía de la radiación en equilibrio térmico puede escribirse como [7]

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad (1.34)$$

$$g_* = \sum_{i=\text{bosones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermiones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4, \quad (1.35)$$

donde  $g_*$  es el número de grados de libertad de bosones y fermiones. Usando las expresiones para la presión y la densidad, podemos escribir  $dp = (\rho + p)dT/T$ , y por lo tanto

$$dS = \frac{1}{T} d[(\rho + p)V] - (\rho + p)V \frac{dT}{T^2} = d \left[ \frac{(\rho + p)V}{T} + cte \right]. \quad (1.36)$$

La entropía por volumen comóvil es  $S = a^3(\rho+p)V/T$ , que es conservada. La entropía por volumen comóvil es dominada por la contribución de partículas relativistas, por lo que aproximadamente,

$$S = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} (aT)^3 = \text{constante}, \quad (1.37)$$

$$g_{*s} = \sum_{i=\text{bosones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermiones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3, \quad (1.38)$$

Una consecuencia de la ecuación anterior para la entropía (1.37) es que, durante una expansión adiabática del universo, el factor de escala crece inversamente proporcional a la temperatura del universo,  $a \propto 1/T$ . Por lo tanto, la observación de que hoy el universo se encuentre en expansión implica que en el pasado el universo debería haber sido más caliente y denso, y que en el futuro se volverá cada vez más frío hasta diluirse. Como la relación entre factores de escala puede describirse en función del parámetro de corrimiento al rojo  $z$ , podemos ver que se satisface la relación

$$T = T_0(1+z) = \frac{a_0}{a} T_0, \quad (1.39)$$

Esta relación ha sido confirmada con gran precisión por las observaciones de los espectros de absorción de cuasares a grandes distancias, que han evidenciado que la temperatura de la radiación cósmica de fondo ha sido corrida hacia el rojo por la expansión cosmológica en la forma predicha por el modelo BBc.

#### 1.1.4 Historia térmica del universo

En esta sección daremos un breve resumen de la evolución térmica del universo, desde la época de Planck hasta el presente. A medida que retrocedemos en el tiempo, el universo se vuelve cada vez más caliente y por lo tanto aumenta la energía disponible para las interacciones entre partículas. En consecuencia, la naturaleza de las interacciones va desde aquellas descritas a bajas energías por la física de largo alcance del electromagnetismo y la gravitación, luego por la física atómica, la física nuclear, a través de la física de altas energías de escala electrodébil, (tal vez) de gran unificación, y finalmente gravedad cuántica. Los últimos dos pasos son inciertos ya que aún no existe una fuerte evidencia experimental para la fenomenología de tan altas energías, y es posible que la naturaleza haya podido seguir un camino diferente a éste. En este sentido son reveladoras las recientes teorías

en dimensiones extras extendidas (no compactas) y de gravedad cuántica [8].

Nuestros conocimientos sobre las interacciones de altas energías de la materia surgen de los aceleradores de partículas, que a medida que aumentan la energía de trabajo, permiten observar los detalles de las interacciones más fundamentales. Sin embargo, uno siempre debe tener en cuenta que las condiciones físicas que tienen lugar en nuestros colisionadores de partículas son muy diferentes a aquellas que tuvieron lugar en el universo temprano. Estas máquinas seguramente nunca podrán reproducir las condiciones de densidad y presión del plasma en rápida expansión del universo temprano. Mas allá de esta observación, estos experimentos son cruciales para entender la física de las interacciones posibles a esas energías. Son de interés las propiedades estadísticas y térmicas de ese plasma primigenio, y el rol de los horizontes causales (de Hubble) durante la expansión del universo temprano. Por ejemplo, es de crucial importancia el tiempo en el cual ciertas partículas se desacoplaron del plasma, es decir, cuando sus interacciones no eran lo suficientemente rápidas comparadas con la expansión del universo, y quedaron fuera del equilibrio con el plasma.

La evolución del universo puede seguirse desde sus orígenes hasta el día de hoy. Habiendo cierta especulación sobre la física que tuvo lugar en el universo en las escalas de energía por sobre aquellas investigadas en los presentes colisionadores. De acuerdo a la visión más aceptada, el universo debió haberse originado en la época de Planck ( $10^{19} GeV, 10^{-43} seg$ ) de una **fluctuación cuántica de la gravedad**. Esta de más decir, que no hay evidencia experimental para esta aseveración: los fenómenos de Gravedad Cuántica se encuentran dentro de la especulación física. Sin embargo, todo indica que inmediatamente después debe haber existido un período de **inflación cosmológica** (expansión acelerada del universo). A continuación, el universo debería haber transcurrido la época de las **Teorías de Gran Unificación** (GUT) ( $10^{16} GeV, 10^{-35} seg$ ). Las fluctuaciones cuánticas primordiales del campo inflatón dejaron sus huellas como pequeñas perturbaciones en lo que hubiese sido de otra forma un sector muy homogéneo del universo. Hacia el final de inflación, la inmensa densidad de energía del campo inflatón se convirtió en partículas fundamentales, que inmediatamente después se termalizaron dando origen a lo que conocemos como BBc. A este proceso se lo conoce como **recalentamiento** del universo. A partir de allí, el universo fue dominado por radiación. Es una posibilidad (pero de ninguna forma una certeza) que la asimetría entre materia y antimateria fuese originada en ese momento a partir de la energía disponible del universo, después del decaimiento del inflatón. Este proceso es conocido como **bariogénesis**

ya que los bariones (en su mayoría quarks en esa época) debieron haberse originado en ese entonces, del sobrante de la aniquilación con antibariones. Aunque, actualmente se especula que la bariogénesis puede haberse producido en escalas de energías mucho mas bajas, como la escala electrodébil ( $100\text{Gev}, 10^{-10}\text{seg}$ ). Hay que observar que aunque los experimentos de física de partículas han logrado alcanzar energías altas como los  $100\text{GeV}$ , no existe aún evidencia observacional de que el universo haya transcurrido por la **transición de fase electrodébil**. Si se confirmara lo anterior, entonces la bariogénesis constituiría otra "ventana" al universo temprano. A medida que el universo se fue enfriando, puede haber transcurrido una transición de fase quark-hadrón ( $10^2\text{MeV}, 10^{-5}\text{seg}$ ), cuando los bariones (en su mayoría protones y neutrones) se formaron a partir de los quarks constitutivos.

Nuestra ventana mas lejana en este momento del universo temprano es la **nucleosíntesis primordial** ( $1 - 0.1\text{MeV}, 1\text{seg} - 3\text{min}$ ), cuando protones y neutrones eran lo suficientemente fríos como para que se formaran sistemas ligados, dando lugar a los núcleos mas livianos, inmediatamente después del **desacoplamiento de los neutrinos**. Es el reino de la física nuclear. La abundancia relativa observada de los elementos livianos esta de acuerdo con las predicciones de la teoría BBc. A continuación ocurrió la aniquilación electrón-positrón ( $0.5\text{MeV}, 1\text{min}$ ) transformándose toda su energía en fotones. Mucho después, ( $1\text{eV}, \sim 10^5\text{años}$ ) la materia y la radiación alcanzaron densidades de energías iguales. A partir de allí, los electrones quedaron ligados a los núcleos para formar átomos ( $0.3\text{eV}, 3 \times 10^5\text{años}$ ), un proceso denominado **recombinación**. Es el reino de la física atómica. Inmediatamente después, los fotones se desacoplaron del plasma a partir de lo cual han viajado libremente hasta el día de hoy. Estos fotones que observamos, ya "cansados" por la expansión del universo (efecto Doppler cosmológico), son los que observamos en la radiación cósmica de fondo de microondas. Mucho tiempo después ( $\sim 1 - 10^9\text{años}$ ), las pequeñas inhomogeneidades generadas durante inflación han crecido debido al colapso gravitatorio para formar galaxias, cúmulos de galaxias, supercúmulos, filamentos y vacíos caracterizando la época de **formación de estructuras**. Es el reino de la física gravitatoria de largo alcance, tal vez dominada por una energía del vacío en la forma de una constante cosmológica. Finalmente ( $3\text{K}, 13 \times 10^9\text{años}$ ), el Sol, la Tierra, y la vida biológica se originaron a partir de generaciones previas de estrellas, y de una sopa primordial de componentes orgánicos, respectivamente.

### 1.1.5 Los horizontes cosmológicos

El ritmo de expansión del universo está dado por el parámetro de Hubble. El radio de Hubble  $cH^{-1}$  (o igual a  $H^{-1}$  para unidades  $c = 1$ ) es usualmente denominado **horizonte de Hubble** ya que da una estimación de la distancia que la luz puede viajar mientras el universo se expande apreciablemente. Entendiéndose que al referirnos a la luz estamos idealizando que es la portadora de información causal a la velocidad  $c = 1$  y sin colisiones. Además existen otros dos horizontes relevantes: el **horizonte de partículas**, que es la distancia que la luz puede haber viajado desde el origen del universo, en  $a = 0$ ; y el **horizonte de eventos**, que es la distancia que la luz será capaz de alcanzar en el futuro. De estos tres, el horizonte de Hubble es el mas importante y usualmente se lo denomina como 'el horizonte'.

El horizonte de partículas se define como

$$r_p(t_0) \equiv a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a}. \quad (1.40)$$

donde  $t_0$  es el tiempo actual. Esta distancia es muy importante ya que nos permite calcular el tamaño del universo observable. Asumiendo una densidad crítica y suponiendo que el universo siempre estuvo dominado por materia, entonces  $r_p(t_0) = 2H_0^{-1}$ .

Es importante no confundir el horizonte de partículas con el radio de Hubble. Es posible que haya partículas fuera de la esfera de Hubble pero dentro del horizonte de partículas. Además, una vez dentro del horizonte de partículas, cualquier cosa permanecerá dentro de él para siempre. Este no es el caso para la esfera de Hubble, los objetos pueden estar dentro de la esfera de Hubble en algún momento, salir de ella un tiempo después (por ejemplo durante una expansión exponencialmente acelerada del universo en el que el radio de Hubble es constante) y volver a entrar mas adelante. La diferencia radica en que el horizonte de partículas a un tiempo  $t$  tiene en cuenta toda la historia del observador hasta  $t$ , mientras que el radio de Hubble se define instantaneamente para  $t$ .

El horizonte de eventos, resulta útil en el estudio de agujeros negros pero no es tan importante en cosmología. El horizonte de eventos separa puntos que pueden emitir señales que un observador puede recibir en algún momento, de aquellos puntos de los que no (causalmente desconectados para siempre). El radio del horizonte de eventos esta dado por

$$r_e(t) \equiv a(t) \int_t^{t_{max}} \frac{c dt'}{a(t')}. \quad (1.41)$$

El horizonte de eventos no existe en los modelos de FRW con  $-1/3 < \omega < 1$ . Pero si existe en un modelo de de Sitter.

## 1.2 Inflación del universo

Antes de hacer un revisión de los conceptos de la teoría inflacionaria es conveniente analizar los problemas de la teoría del Big-Bang que sirvieron como motivación para la creación del modelo de inflación del universo.

### 1.2.1 Problemas en la teoría del Big-Bang caliente

#### I. EL PROBLEMA DE LA PLANARIDAD

La ecuación de Friedmann puede ser escrita en función del parámetro de densidad total  $\Omega = \sum_i \Omega_{(i)}$  (con o sin la constante cosmológica) (1.30), si añadimos módulos nos queda

$$|\Omega(t) - 1| = \frac{|K|}{a^2 H^2} = |\Omega_K|. \quad (1.42)$$

Un universo exactamente plano ( $\Omega = 1$ ) será plano por siempre. Pero la situación es muy diferente si se aleja ligeramente de la densidad crítica.

Consideremos un universo convencional (dominado por radiación o por materia) donde la materia o la radiación es mas importante que la curvatura o la constante cosmológica. Ignorando estos términos y utilizando las soluciones (1.24) y (1.25) se obtiene

$$|\Omega - 1| \propto t \quad \text{RADIACIÓN} \quad (1.43)$$

$$|\Omega - 1| \propto t^{2/3} \quad \text{MATERIA} \quad (1.44)$$

En ambos casos, la diferencia  $|\Omega - 1|$  crece con el tiempo por que  $aH$  es decreciente con  $t$ , incluso durante transiciones de fase térmicas. Esto significa que la geometría plana es una situación inestable para el universo. Es decir,

para una pequeña desviación de la densidad crítica el universo rápidamente se vuelve mas y mas curvo. De la evidencia observacional, se sabe que actualmente  $\Omega_0$  no es muy diferente a la unidad ( $\Omega = 1.003^{+0.013}_{-0.017}$ ), lo que implica que para los comienzos del universo debe haber sido extremadamente cercano a la unidad (muy plano). Para obtener nuestro universo actual durante la nucleosíntesis, cuando el universo tenía un segundo de vida, se requiere que

$$|\Omega_{nuc} - 1| \lesssim 10^{-16} \quad (1.45)$$

Para tiempos anteriores debe haber sido mucho mas cercano a la unidad, por ejemplo durante una transición electrodébil,  $|\Omega - 1| \lesssim 10^{-30}$ .

El problema de planaridad radica en que, de todos los valores posibles, es extremadamente restrictivo que durante nucleosíntesis el valor del parámetro de densidad se encuentre en el rango

$$0.9999999999999999 < \Omega_{nuc} < 1.0000000000000001. \quad (1.46)$$

La forma fácil de resolver el problema es suponer que el universo tiene precisamente la densidad crítica. Pero esta elección tan fina no tiene una explicación. Cualquier otra condición inicial da como resultado un universo cerrado que colapsa casi inmediatamente, o un universo abierto que rápidamente entra en el régimen dominado por la curvatura y se enfría por debajo de los  $3K$  luego de pocos segundos de existencia. Por esta razón al problema de planaridad a veces se lo denomina problema de la edad: *como nuestro universo puede haber persistido durante tanto tiempo?*

Por otro lado la evidencia de gran planaridad del universo temprano sugiere que: en la ecuación de Friedmann  $K = 0$ .

## II. EL PROBLEMA DEL HORIZONTE

El problema del horizonte es el mas importante del modelo del Big-Bang. Se refiere a la comunicación entre diferentes regiones del universo. La cuestión es que el universo no tiene una edad finita, por lo que la luz para cualquier intervalo de tiempo debe haber viajado una distancia finita. La distancia que la luz pudo haber recorrido desde el comienzo del universo determina nuestro universo observable, el horizonte de partículas. Esta región es finita mas allá de que el universo sea infinito o finito.

Una de las propiedades mas importantes de radiación cósmica de fondo es su alta isotropía. Esto es, que la radiación que nos llega desde diferentes partes del cielo poseen, en gran precisión, la misma temperatura  $2.725K$ . Poseer la misma temperatura es característico del equilibrio térmico, por lo que esta observación es explicada a partir de que las diferentes regiones del universo hayan podido interactuar para alcanzar el equilibrio térmico entre ellas. Desafortunadamente, la luz que nos llega de regiones opuestas del cielo ha estado viajando hacia nosotros desde la época del desacople, muy cerca del tiempo del Big-Bang. Como estas señales recién ahora nos alcanzan, es imposible que hayan podido tener tiempo de interactuar en ninguna forma, por lo que no puede esperarse que puedan compartir la misma temperatura y por lo tanto estar en equilibrio térmico.

El golpe definitivo que determina a este como el problema mas relevante, es que la radiación cósmica de fondo no es perfectamente isotrópica, tiene pequeñas fluctuaciones del orden de  $0.00001$  detectadas por el satélite COBE. Estas irregularidades representan las semillas de las que la estructura del universo debe haber crecido. Por la misma razón que dos regiones separadas no pueden ser termalizadas, tampoco pueden crearse irregularidades. Por lo que en la teoría estándar del Big-Bang uno no puede dar un mecanismo para la creación de estas semillas; éstas ya tienen que estar de antemano.

### III. ABUNDANCIA DE MONOPOLOS MAGNÉTICOS

Una de las cosas mas curiosas sobre el universo es que la época dominada por radiación haya durado tanto tiempo, aproximadamente 1000 años. Esto es inesperado ya que la densidad de radiación decae con la expansión como  $a^{-4}$ , que es mucho mas rápido que cualquier otro tipo de materia. Lo que significa que si el universo empieza con una pequeña cantidad de materia no-relativista, luego su decrecimiento mas lento en la densidad  $a^{-3}$  rápidamente la lleva a dominar por sobre la radiación.

Las interacciones entre partículas predichas por el Modelo Estándar no ocasionan ningún problema, ya que interactúan con la radiación y la termalización evita que se vuelvan prominentes. Pero la física de partículas moderna añade otras partículas. La que originalmente motivó la idea de expansión inflacionaria fue el monopolo magnético, sugerido a través de un brillante argumento teórico por Dirac, como una forma de entender la cuantización de la carga eléctrica. La existencia del monopolo es inevitable en los



modelos de unificación de las fuerzas fundamentales, las GUT, y se predice que se produjeron en abundancia durante las etapas más tempranas del universo. Su masa sería extremadamente grande:  $10^{16} GeV$ , comparada con el insignificante protón  $1 GeV$ . El monopolio magnético sería una partícula no-relativista durante casi toda la historia del universo, dándole el tiempo suficiente como para volverse dominante. Pero la observación indica que el universo no es dominado por los monopolos, en este sentido las teorías que lo predicen son incompatibles con el BBC estándar.

### 1.2.2 Fundamentos de inflación

La cosmología inflacionaria no reemplaza a la teoría del Big-Bang, sino que actualmente es aceptada como un complemento de esta en la etapa inicial del universo. De esta forma, después de 26 años de éxitos del modelo inflacionario, el modelo cosmológico estándar actual es: **inflación + Big-Bang**.

La expansión inflacionaria del universo es simplemente una época durante la cual el factor de escala se acelera:

$$\text{INFLACIÓN} \iff \ddot{a} > 0. \quad (1.47)$$

Una definición alternativa de un período inflacionario y que ofrece una interpretación física más clara es

$$\text{INFLACIÓN} \iff \frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{a} < 0. \quad (1.48)$$

Aquí  $H^{-1}/a$  es el **radio de Hubble comóvil**. La condición de inflación implica que durante esta etapa el radio de Hubble comóvil se contraiga con el tiempo.

Si ocurre inflación, entonces es posible resolver los problemas mencionados con el Big-Bang.

En el caso del problema de planaridad recordemos que en la ecuación (1.42), en la teoría de BBc el valor de  $|\Omega_K|$  crece con el tiempo por lo que determina como un punto inestable al valor  $\Omega = 1$ . Inflación soluciona este problema al revertir la situación, ya que por (1.48) vemos que  $(aH)$  crece con el tiempo. Por lo que la densidad crítica del universo se vuelve un atractor, empujando cualquier valor de  $\Omega$  hacia la unidad. En el caso de una

expansión exponencial provocada por una constante cosmológica (1.26), la atracción es tremenda

$$|\Omega(t) - 1| \propto \exp \left[ -\sqrt{\frac{4}{3}} \Lambda t \right]. \quad (1.49)$$

El objetivo de inflación no sólo es forzar el valor de  $\Omega$  hacia la unidad. Es crucial en que se vuelva extraordinariamente cercano a ella, de forma tal que incluso toda la evolución del universo, desde el final de inflación hasta nuestros días, no sea suficiente para apartarla significativamente de la unidad.

Con inflación se remedia el problema del horizonte. Durante este período el tamaño del universo crece fantásticamente, mientras que la escala característica, el radio de Hubble, permanece constante (en inflación exponencial  $H^{-1} = \sqrt{3/\Lambda}$ ) o el radio de Hubble comóvil se contrae. Esto significa que un pequeño sector del universo, lo suficientemente chico como para que se alcance el equilibrio térmico antes de la inflación, se expandió a escalas mucho mayores que nuestro universo observable. Por ello las microondas que llegan de regiones opuestas del cielo se encuentran a la misma temperatura, porque originalmente estaban en equilibrio térmico. En este contexto surge la oportunidad de generar irregularidades en el universo que desencadenen la formación de estructuras cosmológicas.

Finalmente la gran expansión del universo durante inflación diluye fácilmente los masivos monopolos magnéticos, o cualquier otro defecto topológico.

En el contexto de la cosmología de FRW podemos imponer una condición sobre la materia para que fuerce la inflación. De la ecuación (1.21) y con  $\Lambda = 0$  o teniéndola en cuenta dentro de  $\rho$  y  $p$ , se obtiene una restricción para las posibles ecuaciones de estado

$$\text{INFLACIÓN} \iff \rho + 3p < 0. \quad (1.50)$$

Asumiendo que  $\rho$  siempre es positiva, luego  $p$  debe ser negativa para satisfacer la condición, que resulta ser independiente de la curvatura del universo.

### 1.2.3 El campo inflatón

Para obtener inflación, es necesario materia con la propiedad inusual de generar presión negativa. Los campos escalares, que describen partículas de spin-0, cumplen esta propiedad. En la cosmología inflacionaria cumplen un rol vital, ya que poseen una energía potencial inusual que prácticamente no sufre corrimiento Doppler con la expansión del universo. Esto resulta en una ecuación de estado efectiva con presión negativa, que es lo que se necesita para inflación. Al campo escalar responsable por la inflación se lo denomina **inflatón**.

La era inflacionaria se encuentra en la escala de energías de las GUT [16]. En este contexto se pueden obtener campos efectivos o "condensados" a partir de campos fundamentales. Como los fermiones tienen valor de expectación nulo, sólo los campos bosónicos son importantes. Pero estos bosones no necesitan ser fundamentales, pueden ser pares fermión-antifermión  $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$  en una GUT. Para describir la evolución cosmológica es suficiente considerar la dinámica efectiva de estos condensados. Es más, para obtener un período inflacionario es suficiente un campo bosónico condensado.

De esta forma el campo inflatón no sería una partícula real (ni siquiera una inestable). Sino que una descripción efectiva de la dinámica. La descripción microscópica detallada se encontraría en una GUT. Afortunadamente, no necesitamos conocer esta teoría para obtener una descripción de la evolución cosmológica.

Para obtener una dinámica para un campo escalar acoplado a la gravedad, podemos utilizar un principio variacional de campos. A partir de la acción para materia

$$I_\varphi = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi) \right), \quad (1.51)$$

podemos deducir el tensor de energía-momento a partir de (1.12), obteniéndose

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi + V(\varphi) \right]. \quad (1.52)$$

Si uno asume que la geometría, y por lo tanto la materia, es homogénea e isotrópica, luego el tensor de energía-momento es de un fluido perfecto. Por

simplicidad podemos considerar que  $\varphi(t)$  solo depende del tiempo, en ese caso su densidad de energía

$$\rho = -T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (1.53)$$

donde uno puede reconocer la suma de una energía cinética y una potencial. Similarmente se identifica una presión

$$p = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (1.54)$$

La ecuación de movimiento para el campo inflatón que surge de minimizar la acción respecto a una variación del campo para un modelo de FRW es

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V' = 0. \quad (1.55)$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones que gobierna la dinámica del inflatón, y a través de las ecuaciones de Einstein, la geometría del universo de FRW, resulta ser

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right), \quad (1.56)$$

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V' = 0, \quad (1.57)$$

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\varphi}^2. \quad (1.58)$$

#### 1.2.4 Reseña histórica de inflación

El primer modelo inflacionario fue propuesto por Alexei Starobinsky [9]. Este modelo se concentraba en la anomalía conforme de la gravedad cuántica, pero era complicado y no resolvía los problemas de la homogeneidad, el horizonte y los monopolos. Sin embargo cabe resaltar que fue el primer modelo en predecir un espectro invariante de escala de las ondas gravitacionales.

Un modelo mucho mas simple con una motivación física clara fue propuesto por Alan Guth [10]. Su modelo, que se denomina **inflación vieja**, se basó en la teoría de superenfriamiento (supercooling) durante las transiciones de fase cosmológicas. Aunque este escenario fue rápidamente desplazado por no resolver el problema de la homogeneidad, sentó los fundamentos de la teoría cosmológica inflacionaria en el sentido que intentaba dar un clara y simple explicación sobre gran cantidad de los problemas cosmológicos.

De acuerdo a este escenario, inflación es una expansión exponencial del universo en un estado de falso vacío superenfriado. El falso vacío es un estado metaestable sin campos ni partículas pero con una densidad de energía enorme. Cuando el universo se expande, el espacio vacío permanece vacío, por lo que su densidad de energía no cambia. El universo se expande exponencialmente con una densidad de energía constante. Se dice que tenemos inflación en un falso vacío. Luego el falso vacío decae por efecto tunel en una fase de burbujas, estas burbujas colisionan y el universo se calienta.

Desafortunadamente, si las burbujas se forman una muy cerca de la otra, sus colisiones hacen que el universo sea extremadamente inhomogéneo. Pero si se forman muy alejadas unas de las otras, cada una de ellas representan universos abiertos separados, y con un valor residual de  $\Omega$ . Ambas opciones son inaceptables.

Este problema pudo resolverse con la invención de la teoría de **inflación nueva** [11]. En esta teoría, la inflación comenzaba por un estado de falso vacío, o por un estado de equilibrio inestable de un potencial efectivo. Luego el campo inflatón  $\varphi$  rueda lentamente al mínimo del potencial. El movimiento del campo hacia el vacío físico es de crucial importancia: las perturbaciones en la densidad durante la inflación de rodadura lenta son inversamente proporcionales a  $\dot{\varphi}$  [12, 13, 14, 17]. Luego, la diferencia entre el nuevo escenario de inflación y el viejo era que la parte útil de inflación para resolver la homogeneidad del universo, no ocurría en el falso vacío, donde  $\dot{\varphi} = 0$ .

Este escenario resultó ser tan popular en los comienzos de los ochenta que muchos libros actuales de astrofísica describen a inflación como una expansión exponencial durante una transición de fase de altas temperaturas en una GUT. Desafortunadamente inflación nueva estaba plagada de problemas. Funcionaba cuando el potencial efectivo del campo inflatón era muy plano en un entorno de  $\varphi = 0$ , que parece ser muy artificial. En la mayoría de las versiones de este escenario el campo inflatón tenía una constante de acoplamiento extremadamente pequeña, por lo que no podía alcanzar un equilibrio térmico con otros campos de materia. La teoría de las transi-

ciones de fase cosmológicas, que eran la base de la vieja y la nueva inflación, no funcionaban en esa situación. Es más, el requerimiento de equilibrio térmico exige que muchas partículas interactúen entre ellas. Esto significa que la inflación nueva podía explicar el porque de que nuestro universo sea tan grande sólo cuando contuviera un número muy grande de partículas y fuera muy grande desde el comienzo. Finalmente, en esta teoría la inflación comenzaba muy tarde. Durante la época precedente el universo puede recolapsár fácilmente o volverse tan inhomogéneo que el período inflacionario podría no producirse [15].

La inflación vieja y la nueva representaron una modificación sustancial pero incompleta de la teoría del Big-Bang. Todavía se creía que el universo se encontraba desde el comienzo en un estado de equilibrio térmico, que era relativamente homogéneo y lo suficientemente grande como para sobrevivir hasta que comenzara inflación. A comienzos de los ochenta estas suposiciones parecían ser las más naturales y prácticamente no eran objetadas. Para resolver estos problemas Andrei Linde sugirió el escenario de **inflación caótica**. De acuerdo a este escenario, la inflación podría ocurrir en teorías con potenciales muy simples  $V(\varphi) \sim \varphi^n$ . Inflación ocurriría incluso sin equilibrio térmico en el universo temprano, e incluso en la densidad de Planck, en cuyo caso el problema de la condiciones iniciales para inflación puede ser resuelto fácilmente[15].

### 1.2.5 Fenomenología de inflación caótica

Consideremos el modelo mas simple de una campo escalar  $\varphi$  con una masa  $m$  en una densidad de energía potencial  $V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2$ . Como la función tiene un mínimo en  $\varphi = 0$ , uno espera que el campo oscile respecto al mínimo. Este es el caso en el que el universo estático, en cuyo caso la ecuación de movimiento del campo escalar coincide con la de un oscilador armónico,  $\ddot{\varphi} = -m^2\varphi$ .

Sin embargo, por la expansión del universo con una constante de Hubble  $H$ , surge un término adicional  $3H\dot{\varphi}$  de amortiguamiento al movimiento oscilatorio:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = -m^2\varphi. \quad (1.59)$$

Esta ecuación es la misma que (1.55) con el potencial armónico. La ecuación de Friedmann resulta ser

$$H^2 = \frac{1}{6} (\dot{\varphi}^2 + m^2 \varphi^2). \quad (1.60)$$

En lo que sigue trabajaremos con las unidades de Planck  $M_p^{-2} = 8\pi G = 1$ .

Si inicialmente el campo  $\varphi$  es grande, el parámetro de Hubble  $H$  también será grande, de acuerdo a la ecuación anterior. Esto implica que el término de fricción  $3H\dot{\varphi}$  es muy grande, por lo que el campo escalar se mueve muy despacio, como una bola cayendo en un líquido viscoso. Por esto, en esta etapa la densidad de energía del campo escalar, a diferencia de la materia ordinaria, permaneció casi constante, y la expansión del universo continuó con una velocidad mucho más grande que en la vieja teoría cosmológica. Debido al rápido crecimiento en la escala del universo y a un lento movimiento del campo  $\varphi$ , inmediatamente después del inicio del régimen uno ve que  $\ddot{\varphi} \ll 3H\dot{\varphi}$ ,  $H^2 \gg K/a^2$ ,  $\dot{\varphi}^2 \ll m^2\varphi^2$ , por lo que el sistema de ecuaciones puede simplificarse:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{m\varphi}{\sqrt{6}}, \quad \dot{\varphi} = -m\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (1.61)$$

La primera ecuación implica que si el campo varía lentamente, el tamaño del universo crece aproximadamente como  $e^{Ht}$ , donde  $H = \frac{m\varphi}{\sqrt{6}}$ . Esta es la etapa de inflación, que finaliza cuando  $\varphi$  es mucho menor que  $M_p = 1$ . La solución de estas ecuaciones muestran que para un largo período de inflación exponencial, el universo debe contener inicialmente un campo  $\varphi \gg 1$  [15],

$$a = a_0 e^{\varphi^2/4}. \quad (1.62)$$

Esto es lo más simple que puede ser. Inflación no requiere superenfriamiento o efecto túnel desde un falso vacío, o un potencial efectivo artificial con una meseta. Se puede ver que es tan simple como el oscilador armónico.

Que sucede con las condiciones iniciales requeridas para inflación caótica? Consideremos un universo cerrado de tamaño inicial  $l \sim 1$  (en unidades planckianas), que emerge de una singularidad, o de la 'nada' en un estado con una densidad de Planck  $\rho \sim 1$ . Sólo desde este instante, a  $\rho \lesssim 1$ , podemos describir este dominio como un universo clásico. Por lo tanto, en ese momento inicial la suma de la densidad de energía cinética, la densidad de energía de gradiente y la densidad de energía potencial es del orden de la unidad:  $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2a^2}(\partial_i\varphi)^2 + V(\varphi) \sim 1$ .

Hay que resaltar que en principio no hay restricciones para el valor inicial del campo escalar en ese dominio, excepto por  $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2a^2}(\partial_i\varphi)^2 + V(\varphi) \sim 1$ . Consideremos por un momento una teoría con  $V(\varphi) = cte$ . Esta teoría es invariante ante la traslación  $\varphi \rightarrow \varphi + c$ . Por ello, en este caso todos los valores iniciales de la componente homogénea del campo  $\varphi$  son igualmente probables.

La única restricción en la amplitud del campo surge si el potencial efectivo no es constante, y crece volviéndose mayor que la densidad de Planck en  $\varphi > \varphi_p$ , donde  $V(\varphi_p) = 1$ . Esta restricción implica que  $\varphi \lesssim \varphi_p$ , pero no habría una razón para esperar que el valor inicial de  $\varphi$  sea mucho menor que  $\varphi_p$ . Esto sugiere que el valor inicial típico del campo es  $\varphi \sim \varphi_p$ .

En este sentido, se espera que las condiciones iniciales típicas en el dominio en consideración sean  $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \sim \frac{1}{2a^2}(\partial_i\varphi)^2 \sim V(\varphi) \sim \mathcal{O}(1)$ .

Si  $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2a^2}(\partial_i\varphi)^2 \lesssim V(\varphi)$ , entonces comienza inflación, y luego durante el tiempo de Planck los términos  $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$  y  $\frac{1}{2}(\partial_i\varphi)^2$  se vuelven mucho menores que  $V(\varphi)$ , lo que asegura la perdurabilidad de inflación.

Si consideramos  $3 \times 10^{-6}$  como un valor realista para la masa  $m$ , en unidades planckianas. Entonces por la ecuación (1.62), la cantidad de inflación obtenida cuando  $V(\varphi) \sim 1$  es del increíble orden  $10^{10^{10}}$ . En este modelo el período inflacionario dura aproximadamente  $10^{-30}$  segundos. Cuando finaliza inflación, el campo escalar  $\varphi$ , que contiene toda la energía del universo, comienza a oscilar alrededor del mínimo del potencial. Perdiendo su energía en la creación de pares de partículas elementales. Estas partículas interactúan entre ellas alcanzando un equilibrio térmico a una determinada temperatura. A partir de aquí, el universo se describe por la teoría del Big-Bag caliente.

La mayor diferencia entre la teoría inflacionaria y la vieja cosmología se manifiesta cuando uno calcula el tamaño de un dominio hacia el final de inflación. Se puede comprobar que incluso en el caso que el universo inflacionario inicial fuese del tamaño de la escala de Planck  $l_p \sim 10^{-33}cm$ , después de  $10^{-33}$  segundos de inflación el universo ha crecido al valor  $l \sim 10^{10^{10}}cm$ ! Este número depende del modelo en cuestión, pero en todos los modelos realistas el tamaño del universo después de inflación resulta ser varios ordenes de magnitud mayores al nuestro universo observable,  $l \sim 10^{28}cm$ . Esto inmediatamente resuelve la mayoría de los problemas de la vieja teoría del Big-Bang.

Si nuestro universo primordial consistía de dominios del campo caóticamente distribuidos (o si uno imagina diferentes universos con diferentes valores del campo), luego los dominios en los cuales el campo era muy pequeño nunca se inflaron. La mayor contribución al volumen total del universo estará dado



por aquellos dominios que originalmente contengan un campo escalar muy grande. El período inflacionario creó de esos dominios gigantescas islas de homogeneidad a partir de un universo de dominios caóticamente distribuidos (es por ello que se denomina **inflación caótica**). Cada uno de estos dominios resultaría ser mucho mayores que el universo observable.

## Chapter 2

# Teoría lineal de perturbaciones cosmológicas

### 2.1 Perturbaciones Cosmológicas Newtonianas

#### 2.1.1 Introducción

El crecimiento de las fluctuaciones de densidad es una consecuencia de la naturaleza puramente atractiva de la fuerza gravitatoria. Imaginemos (primero en un fondo que no se expande, ej: espacio-tiempo de Minkowski) un exceso en la densidad de energía  $\delta\rho$  localizada en algún punto del espacio  $\vec{x}$ . Esta fluctuación produce una fuerza atractiva que tiende a conglomerar la materia vecina a  $\vec{x}$ . La magnitud de esta fuerza es proporcional a  $\delta\rho$ . De la segunda ley de Newton.

$$\ddot{\delta\rho} \sim G\delta\rho, \tag{2.1}$$

donde  $G$  es la constante gravitacional de Newton y la derivada respecto al tiempo se denota con un punto. Por lo tanto hay una inestabilidad exponencial al desarrollo de fluctuaciones en un espacio-tiempo plano que no se expande. Por esto, en Relatividad General es inconsistente considerar fluctuaciones de densidad en un fondo que no se expande. Si consideramos estas fluctuaciones en un fondo expandiéndose, la expansión del espacio introduce un término de fricción en (2.1). Entonces, en vez de una inestabilidad exponencial, las fluctuaciones tendrán una tasa de crecimiento que sigue una ley de potencias con el tiempo. Es crucial determinar cual es esta potencia,

el ritmo de expansión del fondo cosmológico y la escala de la longitud de las fluctuaciones.

### 2.1.2 Perturbaciones en un espacio-tiempo de Minkowski

Para desarrollar algo de intuición física, primero consideremos la evolución de fluctuaciones de materia hidrodinámica en un fondo estático.

En este contexto, la materia puede describirse como un fluido perfecto, y la gravedad por el potencial gravitatorio Newtoniano  $\Phi$ . Las variables del fluido son: la densidad de energía  $\rho$ , la presión  $p$ , la velocidad  $\vec{v}$ , y la densidad de entropía  $S$ . Las ecuaciones hidrodinámicas básicas son

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) &= 0, \\
 \dot{\vec{v}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \Phi &= 0, \\
 \nabla^2 \Phi &= 4\pi G \rho, \\
 \dot{S} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) S &= 0, \\
 p &= p(\rho, S).
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

La primera es la ecuación de continuidad. La segunda es la ecuación de Euler (de fuerza). La tercera es la ecuación de Poisson para la gravedad Newtoniana. La cuarta expresa la conservación de la entropía. Mientras que la última describe una ecuación de estado.

Las propiedades del fondo se obtienen de la densidad de energía de fondo  $\rho_0$ , la presión de fondo  $p_0$ , con una velocidad de fondo nula, un potencial gravitatorio de fondo constante  $\Phi_0$  y una densidad de entropía de fondo constante  $S_0$ .

Las ecuaciones para las perturbaciones cosmológicas se obtienen de perturbar las variables del fluido alrededor del fondo,

$$\begin{aligned}
 \rho &= \rho_0 + \delta\rho, \\
 \vec{v} &= \delta\vec{v}, \\
 p &= p_0 + \delta p, \\
 \Phi &= \Phi_0 + \delta\Phi, \\
 S &= S_0 + \delta S,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde los campos perturbados  $\delta\rho$ ,  $\delta\vec{v}$ ,  $\delta p$ ,  $\delta\Phi$  y  $\delta S$  son funciones del espacio y el tiempo. Si insertamos estas expresiones en las ecuaciones hidrodinámicas (2.2) y linealizamos, obtendremos las siguientes ecuaciones diferenciales para las fluctuaciones en la densidad de energía  $\delta\rho$  y las fluctuaciones en la densidad de entropía  $\delta S$

$$\ddot{\delta\rho} - c_s^2 \nabla^2 \delta\rho - 4\pi G \rho_0 \delta\rho = \sigma \nabla^2 \delta S, \quad (2.4)$$

$$\dot{\delta S} = 0, \quad (2.5)$$

donde las variables  $c_s^2$  y  $\sigma$  describen una ecuación de estado

$$\delta p = c_s^2 \delta\rho + \sigma \delta S, \quad (2.6)$$

siendo  $c_s$  la velocidad del sonido, tal que

$$c_s^2 = \left( \frac{\delta p}{\delta\rho} \right)_S. \quad (2.7)$$

Como las ecuaciones son lineales, podemos trabajar en el espacio de Fourier. En ese sentido las componentes de Fourier  $\delta\rho_{\mathbf{k}(t)}$  del campo perturbado  $\delta\rho_{(t,\vec{x})}$

$$\delta\rho_{(t,\vec{x})} = \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \delta\rho_{\mathbf{k}(t)}, \quad (2.8)$$

evolucionan independientemente.

Las fluctuaciones pueden clasificarse:

- (i) si  $\delta S = 0$ , hablamos de fluctuaciones **adiabáticas**.
- (ii) si  $\delta S \neq 0$  y  $\delta\rho = 0$ , entonces hablamos de fluctuaciones de **entropía**.

Las primeras conclusiones que podemos extraer de las ecuaciones (2.4) y (2.5) son

- 1) Las fluctuaciones de entropía no crecen.
- 2) Las fluctuaciones adiabáticas son dependientes del tiempo.

3) Las fluctuaciones de entropía actúan como fuentes de modos adiabáticos.

Si nos concentramos en la ecuación de movimiento para  $\delta\rho$  (2.4), vemos que el tercer término en la izquierda representa la fuerza debido a la gravedad, una fuerza puramente atractiva que implica una inestabilidad en el espacio-tiempo plano y estático para el desarrollo de las fluctuaciones de densidad. El segundo término en (2.4) representa la fuerza debido a la presión del fluido que tiende a formar ondas de presión. En ausencia de fluctuaciones de entropía ( $\delta S = 0$ ), la evolución de  $\delta\rho$  es gobernada por la acción conjunta de la presión y la gravedad.

Restringiendo nuestro análisis a las fluctuaciones adiabáticas, vemos de (2.4) que existe una longitud de onda crítica, la longitud de Jeans, cuyo número de onda  $k_J$  está dado por

$$k_J = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2}}. \quad (2.9)$$

Las fluctuaciones de longitudes de onda mayores a la longitud de Jeans ( $k \ll k_J$ ) crecen exponencialmente

$$\delta\rho_{k(t)} \sim e^{\omega_k t}, \quad \omega_k \sim 4\sqrt{\pi G\rho_0}, \quad (2.10)$$

mientras que los modos de longitud de onda corta ( $k \gg k_J$ ) oscilan con frecuencia  $\omega_k \sim c_s k$ . Es importante notar que en un universo en expansión el valor de la longitud de Jeans  $k_J$  depende de la ecuación de estado del fondo. Para un fondo dominado por una radiación relativista, la longitud de Jeans es muy grande (del orden del radio de Hubble  $H_{(t)}^{-1}$ ), mientras que para materia sin presión (*polvo*) la longitud de Jeans se anula.

### 2.1.3 Perturbaciones en un fondo en expansión

Mejoremos el análisis previo y estudiemos las fluctuaciones cosmológicas Newtonianas en un fondo en expansión. En este caso, las ecuaciones de fondo son consistentes (se obtiene una expansión cosmológica debido a que el promedio de la densidad de energía es no nulo). Sin embargo, todavía estamos despreciando efectos de relatividad general (las fluctuaciones de la métrica). Estos efectos son dominantes para las escalas de longitudes mayores al radio de Hubble, y por lo tanto el presente análisis es sólo válido para escalas más pequeñas.

El modelo cosmológico de fondo está dado por la densidad de energía  $\rho_{0(t)}$ , la presión  $p_{0(t)}$ , y la velocidad de recesión cosmológica  $\vec{v}_0 = H_{(t)}\vec{x}$  (también conocida como Ley de Hubble), donde  $\vec{x}$  es el vector de la coordenada espacial Euclídea ("coordenadas físicas"). Los campos perturbados dependientes del espacio y del tiempo se definen como en la sección anterior

$$\begin{aligned}\rho_{(t,\vec{x})} &= \rho_{0(t)}(1 + \delta\rho_{\epsilon(t,\vec{x})}), \\ \vec{v}_{(t,\vec{x})} &= \vec{v}_{0(t)} + \delta\vec{v}_{(t,\vec{x})}, \\ p_{(t,\vec{x})} &= p_{0(t)} + \delta p_{(t,\vec{x})},\end{aligned}\tag{2.11}$$

donde  $\delta\rho_{\epsilon} = \delta\rho/\rho_0$  es la densidad de energía perturbada fraccional. La perturbación de presión  $\delta p$  se define como en (2.6). Además, existe la posibilidad de una perturbación de entropía no nula definida como en (2.2).

Ahora insertamos estas expansiones en las ecuaciones hidrodinámicas (2.2), linealizamos en las variables perturbadas, y combinamos las ecuaciones de primer orden para  $\delta\rho_{\epsilon}$  y  $\delta p$  en una única ecuación de segundo orden para  $\delta\rho_{\epsilon}$ . El resultado se simplifica considerablemente si lo trabajamos en *coordenadas comóviles*  $\vec{q}$  que son las coordenadas "pintadas" en el fondo en expansión, esto es con la expansión del universo

$$\vec{x}_{(t)} = a_{(t)}\vec{q}_{(t)}.\tag{2.12}$$

Después de un poco de álgebra, se obtiene la siguiente ecuación que describe la evolución temporal de las fluctuaciones de densidad

$$\delta\ddot{\rho}_{\epsilon} + 2H\delta\dot{\rho}_{\epsilon} - \frac{c_s^2}{a^2}\nabla_{\vec{q}}^2\delta\rho_{\epsilon} - 4\pi G\rho_0\delta\rho_{\epsilon} = \frac{\sigma}{\rho_0 a^2}\delta S,\tag{2.13}$$

donde el subíndice  $\vec{q}$  en el operador  $\nabla$  indica que las derivadas son respecto a las coordenadas comóviles y  $H \equiv \dot{a}/a$  es el parámetro de Hubble. Además, tenemos la ecuación de conservación de la entropía, que es

$$\delta\dot{S} = 0\tag{2.14}$$

Si comparamos con las ecuaciones antes obtenidas para el fondo de Minkowski (2.4), vemos que la única diferencia es la presencia de un término de amortiguamiento que depende del parámetro de Hubble, es decir, de la expansión del universo. Este término moderará la inestabilidad exponencial del fondo hasta las fluctuaciones de densidad de longitud de onda larga.

Además, amortiguará a las soluciones oscilatorias de longitud de onda corta. Específicamente, para números de onda físicos  $k_p \ll k_J$  (donde  $k_J$  es la longitud de Jeans (2.9)), y en un fondo cosmológico dominado por materia (donde  $a \sim t^{2/3}$ ), la solución general de (2.13) en ausencia de fluctuaciones de entropía está dada por

$$\delta\rho_{k(t)} = c_1 t^{2/3} + c_2 t^{-1}, \quad (2.15)$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son dos constantes a determinar por las condiciones iniciales. Nótese que hemos obviado el subíndice  $\epsilon$  en las expresiones que involucren a  $\delta\rho_\epsilon$ . Hay dos soluciones fundamentales, el primero es un modo creciente como  $\delta\rho_{k(t)} \sim a_{(t)}$ , el segundo es un modo decreciente como  $\delta\rho_{k(t)} \sim t^{-1}$ . Para longitudes de onda corta, se obtiene una solución oscilatoria amortiguada

$$\delta\rho_{k(t)} \sim a_{(t)}^{-1/2} \exp \left[ \pm i c_s k \int a_{(t')}^{-1} dt' \right]. \quad (2.16)$$

Como una aplicación sencilla de las ecuaciones para perturbaciones cosmológicas obtenidas anteriormente, podemos comparar las anisotropías en la radiación cósmica de microondas de fondo (CMB) en un universo espacialmente plano compuesto únicamente de materia bariónica -Modelo A- con las anisotropías correspondientes a un universo plano en el que predomina la materia oscura fría (materia oscura no bariónica y sin presión) -Modelo B-. Empezamos por el dato observacional de la amplitud relativa de las fluctuaciones de la densidad en este momento (tiempo  $t_0$ ), y usamos el hecho que la amplitud de las anisotropías de CMB en la escala angular  $\theta_{(k)}$  correspondiente al número de onda comóvil, es determinado por el valor primordial del potencial gravitatorio  $\Phi$  (que será introducido en la siguiente sección) que, a su vez, está relacionado al valor primordial de las fluctuaciones de densidad al momento de cruzar el radio de Hubble (y no al valor al tiempo  $t_{rec}$  de recombinación). Ver capítulo 17 de [17].

En el Modelo A, la componente dominante de la materia sin presión está acoplada a la radiación entre  $t_{eq}$  (tiempo de equivalencia entre materia y radiación) y  $t_{rec}$ . Por lo tanto, la longitud de Jeans es comparable al radio de Hubble. Entonces, para escalas galácticas comóviles,  $k \gg k_J$  en este intervalo de tiempo, por lo que los modos de Fourier de las fluctuaciones de densidad relativa decrecen como  $a_{(t)}^{-1/2}$ . Por otro lado, en el Modelo B,

la componente dominante de materia sin presión se acopla debilmente a la radiación, y luego la longitud de Jeans es bastante más pequeña. En ese caso, en el Modelo B, la densidad relativa crece como  $a(t)$  en el intervalo entre  $t_{eq}$  y  $t_{rec}$ . En el intervalo  $t_{rec} < t < t_0$ , la escala de las fluctuaciones es idéntica para ambos modelos. Resumiendo, tomando un valor fijo de la amplitud actual  $\delta\rho_{k(t_0)}$ , si retrocedemos en el tiempo a los valores  $\delta\rho_{k(t_{eq})}$ , vemos que se cumple la siguiente relación

$$\delta\rho_{k(t_{eq})}|_A \simeq \left( \frac{a(t_{rec})}{a(t_{eq})} \right) \delta\rho_{k(t_{eq})}|_B. \quad (2.17)$$

Por ello, en el Modelo A (sin materia oscura no bariónica) las anisotropías de CMB son 30 veces mas grandes [18] que en el Modelo B, en exceso respecto a los últimos resultados observacionales. Este es uno de los argumentos mas fuertes a favor de la existencia de materia oscura no bariónica.

#### 2.1.4 Caracterización de las perturbaciones

Consideremos perturbaciones de un escala de longitud comóvil fijada por un número de onda comóvil  $k$ . La longitud física correspondiente crece como  $a(t)$ . Esta debe compararse con el radio de Hubble  $H_{(t)}^{-1} = \frac{t}{p}$  cuando  $a(t) \sim t^p$  sigue una ley de potencias: en las etapas avanzadas del universo,  $a(t) \sim t^{1/2}$  en la fase dominada por radiación ( $t < t_{eq}$ ), y  $a(t) \sim t^{2/3}$  en el período dominado por materia ( $t_{eq} < t < t_0$ ). Entonces vemos que para tiempos lo suficiente tempranos, todas las escalas comóviles tenían una longitud física más grande que el radio de Hubble. Si consideramos escalas comológicas grandes (ej: aquellas correspondientes a las anisotropías observadas en la CMB o en los cúmulos de galaxias), el tiempo en el que cruzan el radio de Hubble  $t_{H(k)}$  (cuando la longitud física es igual al radio de Hubble) es posterior a  $t_{eq}$ . Como veremos mas adelante el tiempo  $t_H$  juega un papel importante en la evolución de la perturbaciones cosmológicas.

Las fluctuaciones cosmológicas pueden representarse en el espacio-posición ó en el espacio-impulsos. En el espacio-posición, calculamos el r.m.s. de la fluctuación de masa  $\delta M/M_{(k,t)}$  en una esfera de radio  $l = 2\pi/k$  a un tiempo  $t$ . Un **espectro invariante de escala** se define por la relación

$$\frac{\delta M}{M}(k, t_{H(k)}) = \text{constante}. \quad (2.18)$$

Este espectro fue sugerido por primera vez por Harrison[19] y Zeldovich[20]



como un espectro razonable para las fluctuaciones cosmológicas. Definamos el **índice espectral**  $n$  de las fluctuaciones cosmológicas por la relación

$$\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2(k, t_{H(k)}) \sim k^{n-1}, \quad (2.19)$$

por lo que un espectro es invariante de escala cuando  $n = 1$ .

Para hacer el paso a la representación del espacio-momento, hacemos una descomposición de Fourier en las fluctuaciones de densidad relativa

$$\delta\rho_{\epsilon(t, \vec{x})} = \int d^3k \tilde{\delta\rho}_{\epsilon(t, \vec{k})} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (2.20)$$

La **potencia espectral**  $P_{\delta\rho}$  de las fluctuaciones de densidad se define por

$$P_{\delta\rho(k)} = k^3 |\tilde{\delta\rho}_{\epsilon(k)}|^2. \quad (2.21)$$

donde  $k = |\vec{k}|$ , y hemos asumido por simplicidad una distribución Gaussiana de las fluctuaciones en el que la amplitud de estas depende sólo de  $k$ .

Podemos también definir la potencia espectral para el potencial gravitatorio  $\Phi$

$$P_{\Phi(k)} = k^3 |\tilde{\delta\Phi}_{\epsilon(k)}|^2. \quad (2.22)$$

Estos dos espectros pueden relacionarse a través de la ecuación de Poisson (2.2)

$$P_{\Phi(k)} \sim k^{-4} P_{\delta\rho(k)}. \quad (2.23)$$

En general, la condición de invariancia de escala es expresada en el espacio-momento en términos de la potencia espectral a un tiempo fijo. Para obtener esta condición, primero utilizamos la expresión para las fluctuaciones relativas de densidad (2.15) para determinar la masa de las fluctuaciones en un tiempo fijo  $t > t_{H(k)} > t_{eq}$  (donde la última desigualdad es una condición para las escalas que estamos considerando)

$$\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2(k, t) = \left(\frac{t}{t_{H(k)}}\right)^{4/3} \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2(k, t_{H(k)}). \quad (2.24)$$

El tiempo  $t_{H(k)}$  se obtiene de

$$a_{t_{H(k)}} k^{-1} = 2t_{H(k)}, \quad (2.25)$$

y luego

$$t_{H(k)}^{1/3} \sim k^{-1}. \quad (2.26)$$

Introduciendo este resultado en (2.24) y teniendo en cuenta (2.19) se obtiene

$$\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2(k, t) \sim k^{n+3}. \quad (2.27)$$

Como, para valores razonables del índice de la potencia espectral,  $\delta M/M_{(t,k)}$  es dominado por los modos de Fourier de número de onda  $k$ , luego (2.27) implica

$$|\tilde{\delta\rho}_\epsilon|^2 \sim k^n, \quad (2.28)$$

o lo que es lo mismo

$$P_{\Phi(k)} \sim k^{n-1}. \quad (2.29)$$

## 2.2 Perturbaciones cosmológicas relativistas

### 2.2.1 Introducción

La teoría de fluctuaciones cosmológicas Newtonianas no es válida para escalas mayores al radio de Hubble porque no tiene en cuenta las fluctuaciones de la métrica, y porque en escalas mas grandes la dinámica es dominada por las fluctuaciones de la métrica.

Comencemos demostrando por un argumento heurístico porque las fluctuaciones de la métrica son importantes en escalas mas grandes que el radio de Hubble. Para estas inhomogeneidades, uno debería ser capaz de describir en forma aproximada la evolución del espacio-tiempo el aplicar la ecuación de Friedmann para un universo homogéneo e isotrópico.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi G\rho. \quad (2.30)$$

Teniendo en cuenta esta ecuación, una fluctuación de gran escala en la densidad de energía resulta en una fluctuación "δa" en el factor de escala que crece con el tiempo. Esto se debe a que la gravedad amplifica las fluctuaciones incluso en escalas λ mayores al radio de Hubble.

Este argumento se hará mas riguroso en el siguiente análisis de las fluctuaciones cosmológicas en el contexto de la Relatividad General, donde las inhomogeneidades en la métrica y en la materia deben tenerse en cuenta simultáneamente. Consideraremos fluctuaciones alrededor de un fondo cosmológico homogéneo e isotrópico dado por la métrica de FRW con  $k = 0$ , que puede ser escrita en tiempo conforme η (definido por  $dt = a_{(t)}d\eta$ ) como

$$ds^2 = a_{(\eta)}^2(d\eta^2 - d\vec{x}^2). \quad (2.31)$$

La teoría de perturbaciones cosmológicas consiste en expandir las ecuaciones de Einstein a orden lineal en perturbaciones alrededor de la métrica de fondo. La teoría fue inicialmente desarrollada por Lifshitz en 1946[21]. Pero se obtuvo un progreso significativo en el entendimiento de la física de las fluctuaciones cosmológicas cuando Bardeen en 1980 mostró la importancia en sustraer del análisis los artificios de gauge[22]. Las siguientes secciones consisten en la Parte I del artículo[17].

### 2.2.2 Clasificación de las fluctuaciones

El primer paso en el análisis de las fluctuaciones de la métrica es clasificarlas de acuerdo a sus propiedades de transformación ante rotaciones espaciales. Hay fluctuaciones escalares, vectoriales y tensoriales de segundo orden. En una teoría lineal no hay acoplamiento entre fluctuaciones de diferente orden tensorial, y por lo tanto evolucionan independientemente [23], unas de otras.

Empecemos por expandir la métrica alrededor de la métrica de fondo de FRW:  $g_{\mu\nu}^{(0)}$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

La métrica de fondo sólo depende del tiempo, mientras que las fluctuaciones

de la métrica  $\delta g_{\mu\nu}$  dependen del espacio y del tiempo. Como la métrica es un tensor simétrico, hay en principio 10 grados de libertad de la fluctuación.

Hay cuatro grados de libertad correspondientes a las fluctuaciones escalares de la métrica. Es decir, sólo hay cuatro formas de construir una métrica de fluctuaciones escalares

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} 2\phi & -B_{,i} \\ -B_{,i} & 2(\psi\delta_{ij} - E_{,ij}) \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

donde los cuatro grados de libertad de las fluctuaciones se denotan (siguiendo la notación de [17]) por:  $\phi$ ,  $B$ ,  $E$  y  $\psi$ , y la coma denota la derivada parcial ordinaria (si se hubiese considerado curvatura espacial de la métrica de fondo entonces debería haberse usado la derivada covariante que me define el transporte paralelo), y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

Para las fluctuaciones vectoriales de la métrica también hay cuatro grados de libertad, que consisten en todas las formas posibles de construir una métrica a partir de tres vectores

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{bmatrix} 0 & -S_i \\ -S_i & F_{i,j} + F_{j,i} \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

donde  $S_i$  y  $F_i$  son dos vectores de divergencia nula (para un vector de divergencia no nula, su divergencia contribuye a los modos escalares de las fluctuaciones).

Finalmente, existen dos modos tensoriales que corresponden a los estados de polarización de las ondas gravitacionales

$$\delta g_{\mu\nu} = -a^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

donde  $h_{ij}$  es un tensor de traza nula y divergencia nula.

$$h_i^i = 0 \quad , \quad (h_{ij})_{;j} = 0 \quad (2.36)$$

Las ondas gravitacionales no se acoplan a orden lineal a las fluctuaciones de materia. Las fluctuaciones vectoriales son diluídas en un universo en expansión, y por lo tanto pueden obviarse en el análisis cosmológico. Las fluctuaciones mas importantes en el análisis de la cosmología inflacionaria son

las fluctuaciones escalares de la métrica, que se acoplan a las inhomogeneidades de materia, siendo la generalización relativista de las perturbaciones Newtonianas consideradas anteriormente.

### 2.2.3 Transformaciones de Gauge

La teoría de las fluctuaciones cosmológicas puede resultar a primera vista complicada por el tema de invariancia de gauge (finalmente se verá que esta puede utilizarse para simplificar notablemente la teoría al trabajar con el gauge longitudinal). Las coordenadas  $t, \vec{x}$  del espacio-tiempo llevan un significado físico no independiente si consideramos las transformaciones de coordenadas de Relatividad General. Son sólo "etiquetas" para designar puntos de universo en la variedad pseudo-riemanniana del espacio-tiempo. Al realizar pequeñas transformaciones de las coordenadas del espacio-tiempo, denominadas **transformaciones de gauge**, podemos introducir fácilmente fluctuaciones "ficticias" en un universo homogéneo e isotrópico. Estos modos se denominan **artificios de gauge**.

En nuestro análisis consideraremos la aproximación *activa* a las transformaciones de gauge. Consideremos dos variedades espacio-temporales, la una  $\mathcal{M}_0$  homogénea e isotrópica, y la otra  $\mathcal{M}$  representando el universo físico con inhomogeneidades. Un cambio de coordenadas puede considerarse como un mapeo  $\mathcal{D}$  entre las variedades  $\mathcal{M}_0$  y  $\mathcal{M}$ . Consideremos un segundo mapeo  $\tilde{\mathcal{D}}$  que va a mapear el mismo punto (ej: el origen de un sistema de coordenadas fijo) en  $\mathcal{M}_0$  a diferentes puntos en  $\mathcal{M}$ . Usando la inversa de estos mapeos  $\mathcal{D}$  y  $\tilde{\mathcal{D}}$ , podemos asignar dos conjuntos diferentes de coordenadas a los puntos de  $\mathcal{M}$ .

Tomemos ahora una cantidad física cualquiera  $Q$  (ej: el escalar de Ricci) en  $\mathcal{M}$ , y su cantidad física correspondiente en  $\mathcal{M}_0$  denotada por  $Q^{(0)}$ . Luego, en el primer sistema de coordenadas dado por el mapeo  $\mathcal{D}$ , la perturbación  $\delta Q$  de  $Q$  en el punto  $p \in \mathcal{M}$  se define por

$$\delta Q_{(p)} = Q_{(p)} - Q^{(0)}[\mathcal{D}_{(p)}^{-1}]. \quad (2.37)$$

Análogamente, en el segundo sistema de coordenadas dado por  $\tilde{\mathcal{D}}$ , la perturbación queda definida por

$$\delta \tilde{Q}_{(p)} = Q_{(p)} - Q^{(0)}[\tilde{\mathcal{D}}_{(p)}^{-1}]. \quad (2.38)$$

La diferencia entre las perturbaciones correspondientes a los sistemas de coordenadas diferentes

$$\Delta Q_{(p)} = \delta\tilde{Q}_{(p)} - \delta Q_{(p)}. \quad (2.39)$$

es obviamente un artificio de gauge, sin significado físico.

Algunas de las fluctuaciones de la métrica introducidas al principio como grados de libertad del análisis son artificios de gauge. Para identificarlos debemos estudiar como las transformaciones de las coordenadas actúan en la métrica. Hay cuatro grados de libertad independientes de gauge correspondientes a una transformación de coordenadas,

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu. \quad (2.40)$$

La componente cero (temporal)  $\xi^0$  de  $\xi^\mu$  resulta ser una fluctuación escalar de la métrica. El 3-vector espacial  $\xi^i$  puede descomponerse en

$$\xi^i = \xi_{tr}^i + \gamma^{ij}\xi_{,j} \quad , \quad \text{con } \gamma^{ij} \equiv g^{(0)ij} \quad (2.41)$$

en una parte transversal  $\xi_{tr}^i$  que tiene dos grados de libertad y define perturbaciones vectoriales, y el segundo término (dado por el gradiente del escalar  $\xi$ ) que define una fluctuación escalar. Resumiendo, hay dos modos escalares de gauge dados por  $\xi^0$  y  $\xi$ , y dos modos vectoriales dados por el 3-vector transversal  $\xi_{tr}^i$ . Por lo tanto, nos quedan dos modos escalares y dos modos vectoriales independientes con sentido físico. Las ondas gravitacionales son invariantes de gauge.

Analicemos como las transformaciones de gauge escalares (aquellas dadas por  $\xi^0$  y  $\xi$ ) actúan en las fluctuaciones escalares de la métrica  $\phi$ ,  $B$ ,  $E$  y  $\psi$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= \phi - \frac{a'}{a}\xi^0 - (\xi^0)' \\ \tilde{B} &= B + \xi^0 - \xi' \\ \tilde{E} &= E - \xi \\ \tilde{\psi} &= \psi + \frac{a'}{a}\xi^0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde  $(') \equiv \frac{\partial}{\partial \eta}$ .

Hay dos formas de lidiar con las ambigüedades de gauge. La primera consiste en fijar un gauge, esto es, elegir condiciones para las coordenadas que eliminen la libertad de gauge. Para la segunda se trabaja con una base de variables invariantes de gauge.

Si uno fija el gauge, existen muchos gauge's diferentes para elegir. Es importante notar que el gauge sincrónico usualmente utilizado  $\delta g^{0\mu} = 0$  no fija totalmente el gauge. Una elección conveniente que fija completamente las coordenadas es el **gauge longitudinal o Newtoniano conforme** definido por  $B = E = 0$ .

Si uno prefiere trabajar con una base invariante de gauge, hay muchas elecciones para variables invariantes de gauge. Una base conveniente, introducida por primera vez por [22], es la base de potenciales de Bardeen  $\hat{\Phi}$ ,  $\hat{\Psi}$  definida por

$$\hat{\Phi} = \phi + \frac{1}{a}[(B - E')a]', \quad (2.43)$$

$$\hat{\Psi} = \psi - \frac{a'}{a}(B - E'). \quad (2.44)$$

Las cantidades invariantes de gauge las notaremos con un sombrero.

Se puede ver de las ecuaciones anteriores que las variables invariantes de gauge  $\hat{\Phi}$  y  $\hat{\Psi}$  coinciden con las fluctuaciones diagonales de la métrica  $\phi$  y  $\psi$  respectivamente, en el gauge longitudinal.

Es importante notar que las variables recién definidas son sólo invariantes de gauge ante transformaciones lineales de las coordenadas del espacio-tiempo. Mas allá del orden lineal, la estructura de la teoría perturbativa se complica considerablemente. Se puede demostrar [24] que las únicas fluctuaciones que son invariantes ante cualquier transformación de las coordenadas, son aquellas constantes en el espacio-tiempo de fondo  $\mathcal{M}_0$ .

## 2.2.4 Ecuaciones dinámicas

Empecemos por las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.45)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein asociado a la métrica del espacio-tiempo

$g_{\mu\nu}$ , y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento de la materia. Si insertamos la expansión de la métrica y de un campo de materia (que por simplicidad asumimos que es un campo escalar  $\varphi$ ) alrededor de un fondo de FRW ( $g_{\mu\nu}^{(0)}(\eta), \varphi^{(0)}(\eta)$ )

$$g_{\mu\nu}(\vec{x}, \eta) = g_{\mu\nu}^{(0)}(\eta) + \delta g_{\mu\nu}(\vec{x}, \eta), \quad (2.46)$$

$$\varphi(\vec{x}, \eta) = \varphi_0(\eta) + \delta\varphi(\vec{x}, \eta), \quad (2.47)$$

y expandimos a orden lineal en los campos perturbados, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}. \quad (2.48)$$

Las fluctuaciones de la métrica son  $\delta g_{\mu\nu}$ , mientras que las fluctuaciones de materia son  $\delta\varphi$ .

Las cantidades  $\delta G_{\mu}^{\nu}$  y  $\delta T_{\mu}^{\nu}$  no son invariantes de gauge. Si queremos trabajar con cantidades invariantes de gauge, se puede ver [17] que es posible construir un tensor invariante de gauge  $\delta \hat{G}_{\mu}^{\nu}$

$$\begin{aligned} \delta \hat{G}_0^0 &= \delta G_0^0 + \left( {}^{(0)}G_0^0 \right) (B - E'), \\ \delta \hat{G}_i^0 &= \delta G_i^0 + \left( {}^{(0)}G_i^0 - \frac{1}{3} {}^{(0)}G_k^k \right) (B - E')_{,i}, \\ \delta \hat{G}_j^i &= \delta G_j^i + \left( {}^{(0)}G_j^i \right) (B - E'). \end{aligned} \quad (2.49)$$

De forma análoga puede definirse un tensor de tensiones invariante de gauge  $\delta \hat{T}_{\mu}^{\nu}$ . Luego la forma invariante de gauge de las ecuaciones de Einstein para perturbaciones lineales es

$$\delta \hat{G}_{\mu\nu} = 8\pi G \delta \hat{T}_{\mu\nu}. \quad (2.50)$$

Si ahora insertamos la métrica en estas ecuaciones junto con las fluctuaciones de materia, sólo aparecerán las combinaciones invariantes de gauge de las fluctuaciones.



Si se quiere fijar el gauge, uno puede empezar con la métrica en el gauge longitudinal

$$ds^2 = a^2[(1 + 2\phi)d\eta^2 - (1 - 2\psi)\gamma_{ij} dx^i dx^j], \quad (2.51)$$

y usarla en las ecuaciones generales (2.48).

Ambas formulaciones tienen resultados equivalentes:

$$\begin{aligned} -3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + \nabla^2\Psi &= 4\pi G\delta\hat{T}_0^0, \\ (\mathcal{H}\Phi + \Psi')_{,i} &= 4\pi G\delta\hat{T}_i^0, \\ \left[ (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' \frac{1}{2}\nabla^2 D \right] \delta_j^i - \frac{1}{2}\gamma^{ik} D_{,kj} &= 4\pi G\delta\hat{T}_j^i, \end{aligned} \quad (2.52)$$

donde  $D \equiv \Phi - \Psi$  y  $\mathcal{H} \equiv a'/a$ . Si trabajamos con el gauge longitudinal, luego  $\delta\hat{T}_j^i = \delta T_j^i$ , y así  $\Phi = \phi$  y  $\Psi = \psi$ .

La primera conclusión que podemos sacar es que si no hay tensiones anisotrópicas en las fluctuaciones lineales de materia entonces  $\delta T_j^i = 0$  para  $i \neq j$ . De esta manera las dos fluctuaciones escalares de la métrica coinciden

$$\Phi = \Psi. \quad (2.53)$$

Este es el caso de los modelos cosmológicos más simples.

Consideremos materia que pueda ser descrita en términos de un único campo escalar  $\varphi$ . Este campo puede ser expandido alrededor del fondo  $\varphi_0$  en sus fluctuaciones  $\delta\varphi$

$$\varphi(\vec{x}, \eta) = \varphi_0(\eta) + \delta\varphi(\vec{x}, \eta), \quad (2.54)$$

donde el campo de fondo puede verse como un promedio espacial  $\varphi_0 \equiv \langle \varphi \rangle_{\vec{x}}$ . Luego en el gauge longitudinal y haciendo uso de (2.53) se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\nabla^2\phi - 3\mathcal{H}\phi' - (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\phi &= 4\pi G(\varphi_0' \delta\varphi' + \dot{V}_{(\varphi)} a^2 \delta\varphi), \\
\phi' + \mathcal{H}\phi &= 4\pi G\varphi_0' \delta\varphi, \\
\phi'' + 3\mathcal{H}\phi' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\phi &= 4\pi G(\varphi_0' \delta\varphi' - \dot{V}_{(\varphi)} a^2 \delta\varphi).
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Aquí  $\dot{V}$  es la derivada funcional del potencial respecto al campo  $\varphi$ . Estas ecuaciones pueden combinarse en una única ecuación diferencial de segundo orden para la fluctuación  $\phi$ :

$$\phi'' + 2\left(\mathcal{H} - \frac{\varphi_0''}{\varphi_0'}\right)\phi' - \nabla^2\phi + 2\left(\mathcal{H}' - \mathcal{H}\frac{\varphi_0''}{\varphi_0'}\right)\phi = 0 \quad . \tag{2.56}$$

Este es el resultado final para la evolución de las fluctuaciones cosmológicas clásicas. Es importante notar las similitudes con la ecuación (2.13), que se obtuvo en el límite Newtoniano. Para cada número de onda hay dos soluciones fundamentales. En escalas pequeñas ( $k < H$ ), las soluciones son oscilatorias amortiguadas, mientras que en escala cosmológica ( $k > H$ ) las oscilaciones desaparecen y la dinámica es gobernada por la fuerza gravitatoria que compite con la expansión del universo. Se puede ver que el radio de Hubble aparece naturalmente como la escala en la cual los modos de las fluctuaciones hacen la transición de una solución oscilatoria a una "congelada".

### 2.3 Teoría cuántica de las fluctuaciones de campos cosmológicos

En varios modelos del universo temprano, en particular en cosmología inflacionaria, pero también en escenarios más recientes como Pre-Big-Bang y Ekpyrotic, las inhomogeneidades primordiales surgen de las fluctuaciones cuánticas del vacío en escala microscópica (longitudes de onda menores que el radio de Hubble). Estas longitudes de onda son luego estiradas en relación al radio de Hubble, volviéndose mayores que éste después de un tiempo. Propagándose luego en escalas super-Hubble hasta que vuelven a entrar en la circunferencia de Hubble en etapas posteriores del universo. El origen

cuántico de las fluctuaciones cosmológicas en el contexto de un universo en una fase de expansión de Sitter, fue introducido por Mukhanov [25]. En su trabajo mostró que en un fondo en expansión exponencial, las fluctuaciones de la curvatura serían invariantes de escala. Además, uno de los mayores éxitos del modelo inflacionario es el de convertir a las *fluctuaciones cuánticas iniciales del vacío* en perturbaciones cosmológicas "macroscópicas". Es en este sentido en que inflación determina condiciones iniciales *naturales*, que a su vez concuerdan con las observaciones actuales de estructura cosmológica.

Para entender la generación y posterior evolución de las fluctuaciones en modelos muy tempranos del universo, se necesita de la Mecánica Cuántica y de la Relatividad General juntas, esto es Gravedad Cuántica. En principio nos encontraríamos con un problema intratable, ya que en la actualidad la teoría de Gravedad Cuántica aún no se encuentra bien establecida. Sin embargo el hecho de que actualmente se observa que en escalas cosmológicas la amplitud relativa de las fluctuaciones sean muy pequeñas, justifica un análisis lineal de ellas alrededor de un fondo cosmológico clásico; debido a que la gravedad es una fuerza puramente atractiva las fluctuaciones debieron ser (por lo menos en un universo en expansión eterna) mucho más pequeñas en el universo temprano.

### 2.3.1 Campo escalar sin masa en un de Sitter

Para desarrollar este formalismo es conveniente analizar primero el caso sencillo de un campo escalar real sin masa en un universo de Sitter, o lo que es lo mismo, en un espacio-tiempo de FRW con una expansión espacial exponencial,  $a \propto \exp(Ht)$ . En el tiempo conforme, el factor de escala es

$$a(\eta) = -\frac{1}{H\eta}. \quad (2.57)$$

El tiempo conforme es negativo, por lo que el factor de escala es positivo. La acción para un campo escalar sin masa en esta geometría de de Sitter es

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \right) = \int d\eta d^3x a^4 \left[ \frac{1}{2a^2} \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2a^2} \vec{\nabla} \varphi^2 \right], \quad (2.58)$$

donde hemos sustituido en la acción la métrica (2.31). Es importante notar que aunque permitimos las variaciones espaciales del campo escalar, es decir inhomogeneidades, asumiremos que la geometría es completamente

homogénea, lo cual no resulta ser consistente ya que deberían existir inhomogeneidades en la curvatura espacio-temporal inducidas por la energía (y momento) del campo escalar. Para ello, más adelante consideraremos fluctuaciones en la métrica.

Es posible escribir la acción anterior en función de la variable de Mukhanov

$$u = a\varphi. \quad (2.59)$$

Después de una integración por partes la acción puede reescribirse

$$I = \frac{1}{2} \int d\eta d^3x \left[ u'^2 - (\vec{\nabla}u)^2 + \frac{a''}{a}u^2 \right]. \quad (2.60)$$

Los dos primeros términos son los mismos que los de una acción para un campo escalar libre y sin masa en un espacio-tiempo de Minkowski. Como en nuestro caso el campo escalar vive en un espacio-tiempo de de Sitter, aparece un término efectivo de masa dependiente del tiempo.

$$m_{eff}^2 = -\frac{a''}{a} = -\frac{2}{\eta^2}. \quad (2.61)$$

La ecuación de Euler-Lagrange resulta ser

$$u'' - \nabla^2 u - \frac{a''}{a}u = 0. \quad (2.62)$$

A continuación cuantificaremos al campo escalar por el procedimiento estándar de la teoría cuántica de campos. Al campo cuántico  $\hat{u}$ , lo expandimos en el espacio impulsos de Fourier

$$\hat{u}_{(\eta, \vec{x})} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[ \hat{a}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \mathcal{U}_{k(\eta)} + \hat{a}_k^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \mathcal{U}_{k(\eta)}^* \right], \quad (2.63)$$

donde  $\hat{a}_k^\dagger$  y  $\hat{a}_k$  son los operadores de creación y destrucción que satisfacen las relaciones de conmutación usuales

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0, \quad [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.64)$$

Aquí  $\mathcal{U}_{k(\eta)}$  es una función compleja dependiente del tiempo que debe satisfacer una ecuación de movimiento *clásica* en el espacio de Fourier

$$\mathcal{U}_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\mathcal{U}_k = 0, \quad (2.65)$$

que es la ecuación de movimiento para un oscilador armónico con una masa dependiente del tiempo. En el caso de un campo escalar sin masa en un espacio-tiempo de Minkowski, esta masa efectiva es cero ( $a''/a = 0$ ) y uno obtiene la solución normalizada  $\mathcal{U}_k = (\hbar/2k)^{1/2}e^{ik\eta}$ . Cuando se trata de un universo de Sitter, podemos resolver la ecuación anterior con  $a''/a = 2/\eta^2$ , obteniéndose

$$\mathcal{U}_k = \alpha e^{-ik\eta} \left(1 - \frac{i}{k\eta}\right) + \beta e^{ik\eta} \left(1 + \frac{i}{k\eta}\right). \quad (2.66)$$

La cuantificación canónica consiste en seguir las relaciones de conmutación en las hipersuperficies de  $\eta = \text{constante}$ :

$$[\hat{u}(\eta, \vec{x}), \hat{u}(\eta, \vec{x}')] = [\hat{\pi}_u(\eta, \vec{x}), \hat{\pi}_u(\eta, \vec{x}')] = 0, \quad (2.67)$$

y

$$[\hat{u}(\eta, \vec{x}), \hat{\pi}(\eta, \vec{x}')] = i\hbar\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.68)$$

donde  $\pi_u \equiv \delta I/\delta u'$  es el momento conjugado de  $u$ . En este caso  $\pi_u = u'$ .

Al sustituir la expansión (2.63) en el conmutador anterior, y usando las relaciones de conmutación de los operadores de creación y destrucción, se puede obtener la relación

$$\mathcal{U}_k \mathcal{U}_k'^* - \mathcal{U}_k^* \mathcal{U}_k' = i\hbar, \quad (2.69)$$

que resulta ser la **condición de normalización** de los modos  $\mathcal{U}_k$ .

La elección de una función específica  $\mathcal{U}_k(\eta)$  se corresponde con una prescripción particular del vacío físico  $|0\rangle$ , definido por

$$\hat{a}_k|0\rangle = 0. \quad (2.70)$$

Una elección diferente de los  $\mathcal{U}_k$  se asocia con una descomposición en modos de creación y destrucción diferentes y por lo tanto a un vacío físico diferente.

A continuación analicemos cual es la elección mas natural para la elección de nuestro vacío físico. Durante una expansión de Sitter el radio de Hubble comóvil se contrae y la longitud de onda asociada a algún modo  $\mathcal{U}_k$  puede encontrarse dentro del radio de Hubble si uno retrocede lo suficiente en el tiempo. Es decir, para un  $|\eta|$  lo suficientemente grande, se obtiene que  $k|\eta| \gg 1$ . Es más, para una longitud de onda menor que el radio de Hubble, uno puede despreciar la influencia de la curvatura del espacio-tiempo, por lo que los modos se comportan como en un universo Minkowski. Esto puede comprobarse en la ecuación de movimiento de modos (2.65), donde la masa efectiva se hace despreciable para  $k|\eta| \gg 1$ . Por ello resulta natural elegir la solución particular que se corresponde con aquella del vacío de Minkowski usual, es decir  $\mathcal{U}_k \sim \exp(-ik\eta)$ , en el límite  $k|\eta| \gg 1$ . Con esto, en la solución general (2.66) establecemos  $\beta = 0$ , y a partir de la condición de normalización  $\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2k}}$  por lo que nos queda

$$\mathcal{U}_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2k}} e^{-ik\eta} \left(1 - \frac{i}{k\eta}\right) \quad (2.71)$$

Esta elección en teoría de campos en espacio-tiempos curvos se denomina **vacío de Bunch-Davies** [26].

### 2.3.2 Fluctuaciones cuánticas con perturbaciones de la métrica

Como se advirtió en la sección anterior, las inhomogeneidades  $\delta\varphi$  en el campo escalar necesariamente deben corresponderse a través de las ecuaciones de Einstein con inhomogeneidades  $\Phi$  en la métrica del espacio-tiempo. Empezamos por la acción de Einstein-Hilbert para la gravedad y la acción para un campo escalar de materia, que conjuntamente describirán al modelo de universo

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi) \right]. \quad (2.72)$$

Con el fin de obtener una dinámica a orden lineal para las fluctuaciones cosmológicas debemos expandir a segundo orden en perturbaciones a la acción. Formalmente esto es,

$$I[\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi, g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}] = I^{(0)}[\varphi_0, g_{\mu\nu}^{(0)}] + I^{(1)}[\delta\varphi, g_{\mu\nu}^{(0)}; \varphi_0, g_{\mu\nu}] + I^{(2)}[\delta\varphi^2; \delta g_{\mu\nu}^2; \delta\varphi, \delta g_{\mu\nu}], \quad (2.73)$$

donde el primer término  $I^{(0)}$  sólo contiene la parte homogénea,  $I^{(1)}$  contiene los términos lineales en perturbaciones (con coeficientes que dependen de variables homogéneas), y finalmente  $I^{(2)}$  que contiene términos cuadráticos en las perturbaciones lineales. Al sustituir las ecuaciones de movimiento de FLRW en  $I^{(1)}$ , y después de una integración por partes, se obtiene que  $I^{(1)} = 0$ . Esto es así debido a que este es el mecanismo por el cual uno obtiene las ecuaciones de movimiento homogéneas: a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange que salen de extremar la acción ( $\delta I = 0$ ). Luego el término que nos incumbe es  $I^{(2)}$ , del cual obtendremos las ecuaciones dinámicas lineales para las perturbaciones lineales.

El modelo más sencillo en este caso vimos que es aquel en el que fijamos el gauge longitudinal,

$$ds^2 = a^2[(1 + 2\Phi)d\eta^2 - (1 - 2\Psi)\gamma_{ij} dx^i dx^j]. \quad (2.74)$$

Por otro lado hacemos la expansión semiclásica para el campo de materia  $\varphi(\eta, \vec{x}) = \varphi_0(\eta) + \delta\varphi(\eta, \vec{x})$ . Como ya se vió con anterioridad  $\Psi = \Phi$  ya que  $\delta T_j^i = 0$  para un campo escalar de materia (no hay esfuerzos anisotrópicos a orden lineal). En el formalismo desarrollado por Mukhanov para las fluctuaciones cuánticas de campos cosmológicos se determina una variable  $v$  (de Mukhanov) que reúne a las fluctuaciones de materia con las fluctuaciones de la métrica en un único campo cuántico. Puede verse que el término cuadrático de la acción puede escribirse como

$$I^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^4x \left[ v'^2 - (\vec{\nabla}v)^2 + \frac{z''}{z} v^2 \right], \quad (2.75)$$

donde la variable canónica de Mukhanov está dada por

$$v = a \left[ \delta\varphi + \frac{\varphi'_0}{\mathcal{H}} \Phi \right], \quad (2.76)$$

y  $z = a\varphi'_0/\mathcal{H}$ . La ecuación de movimiento resulta ser

$$v'' - \nabla^2 v - \frac{z''}{z} v = 0. \quad (2.77)$$

Desarrollando en sus modos de Fourier  $\mathcal{V}_k$  se obtiene una ecuación de movimiento para ellos

$$\mathcal{V}_k'' + k^2 \mathcal{V}_k - \frac{z''}{z} \mathcal{V}_k = 0. \quad (2.78)$$

Luego nos enfrentamos al mismo problema anterior, con la diferencia que ha cambiado el factor  $a''/a$  del término de masa efectiva por el factor  $z''/z$ .

En esta sección vimos, en forma muy resumida, el tratamiento estándar para los modelos 4D de la teoría lineal de fluctuaciones cuánticas para campos cosmológicos. Este se caracteriza particularmente por la expansión a segundo orden de las fluctuaciones cosmológicas, y por la identificación de la variable de Mukhanov  $v$  que se construye a partir de las fluctuaciones de materia y de las fluctuaciones de la métrica. En el cuarto capítulo no desarrollaremos este formalismo para el tratamiento de las fluctuaciones cosmológicas en 5D. En cambio, se trabajará con ambas fluctuaciones por separado, determinándose ecuaciones de la dinámica de campo para cada una de ellas.



## Chapter 3

# Teoría de Kaluza-Klein No-compacta

La idea de que nuestro espacio-tiempo ordinario pueda estar inmerso en una variedad de más de 4 dimensiones parece contagiar casi todos los desarrollos recientes de Cosmología y Teoría de Física de Partículas. Desde el viejo modelo de Kaluza-Klein(K-K) [27, 28] hasta las modernas teorías de supergravedad y supercuerdas [29, 30], la suposición de que existen dimensiones extra, aunque no observadas aún, aparenta estar íntimamente conectada con la creencia de que todas las fuerzas de la naturaleza conocidas son diferentes aspectos de una única entidad. Paralelamente con la búsqueda de la unificación hay otra motivación para construir teorías de dimensiones extra, que se remonta a Einstein. Consiste en considerar al mundo físico como una manifestación de geometría pura [31]. De estos dos esquemas, el último incluye la Teoría de Materia Inducida (TMI) o Teoría de Espacio-Tiempo-Materia; una teoría que considera que la materia macroscópica es "inducida" geoméricamente por un mecanismo que sumerge localmente nuestro espacio-tiempo 4D en una variedad 5D Ricci plana [32, 36]. La versión original de la teoría de K-K postula que la 5ta dimensión es compacta. Sin embargo, en TMI este postulado no es requerido. Además, se afirma que sólo una dimensión extra debe ser suficiente para explicar todas las propiedades fenomenológicas de la materia. En este sentido TMI propone que el tensor de energía-momento clásico, que aparece en el lado derecho de las ecuaciones de Einstein, puede ser generado, en principio, a partir de geometría pura. Dicho de otra forma, la curvatura geométrica inducirá materia en 4D, y para observadores en el espacio-tiempo físico de 4D, la dimensión extra aparecería como la materia que es la fuente de gravedad. Un punto interesante

es que la materia "generada" por este proceso es de un tipo muy general, esto es: cualquier tensor de energía-momento puede producirse al elegir la inmersión apropiada; un resultado que es sustentado matemáticamente por un poderoso teorema de la geometría diferencial debido a Campbell y Magaard [37, 39].

Por otro lado, la pregunta de como la dinámica de partículas de prueba es influenciada por la 5ta dimensión ha sido ampliamente examinada [40]. Se ha afirmado que desviaciones de la dinámica 4D convencional puede interpretarse debido a la existencia de una 5-fuerza. Estas desviaciones son en principio apreciables ante una medición. Entre los experimentos que se están realizando, el Satellite Test of the Equivalence Principle (STEP) es de particular interés. En teoría será capaz de determinar apartamientos de las leyes de movimiento estándar y efectos que surgirían de un vacío no convencional. STEP tiene el potencial para mostrar la existencia de al menos una dimensión extra o confirmar de que debemos conformarnos con el espacio-tiempo. Entre las cuestiones a definirse en el terreno de la experimentación está la prescripción matemática para calcular esta fuerza, que no es única y depende de suposiciones básicas de la teoría 5D subyacente. Estos conceptos dependen estrictamente en si la geometría del espacio-tiempo 4D observado es definido por un mecanismo de inmersión o por una foliación de la variedad 5D.

### 3.1 Fundamentos de la Teoría de Kaluza-Klein

La idea de que nuestro mundo puede tener mas de 4 dimensiones se debe a Kaluza, quien descubrió forma brillante que una variedad 5D puede ser utilizada para unificar la teoría de Einstein de la relatividad general con la teoría del electromagnetismo de Maxwell. Einstein, quien fue el referee del paper original de Kaluza en 1919 [27] no aceptó la idea en un principio, pero posteriormente en 1921 cambió de parecer y terminó aceptando el trabajo. Es más, fue Einstein y Bergmann [41] quienes enfatizaron la idea de Klein [28] de que la compactificación de un grupo de gauge (i.e.  $U(1)$  en vez de  $R$ ), y por lo tanto la cuantificación de la carga eléctrica, podía verse al postular que la dimensión extra tenía la topología  $S^1$ . Esta idea hacía una conexión con la nueva teoría cuántica al suponer que la dimensión extra era microscópica o compacta; vinculando su tamaño a través de la constante de Planck con la magnitud de la carga del electrón.

Históricamente fue Gunnar Nordström [42] quien introdujo la idea de dimensión espacial extra en la física. En 1914, descubrió que es posible unir la física del electromagnetismo con la gravitacional postulando la existencia de una cuarta dimensión espacial. Consideró un potencial vectorial pentadimensional que podía escribirse en la forma  $(4 + 1)$  a través de  $A_B = A_\mu + \phi$  siendo  $A_\mu$  el potencial vector electromagnético tetradimensional y  $\phi$  un campo escalar identificado como el campo gravitacional. Pero Nordström trabajó con una teoría escalar de la gravedad, y no con una teoría tensorial como la teoría de la relatividad general, la cual no había sido publicada aún. Cuando Einstein publicó su teoría de la relatividad general, Nordström abandonó su propia idea. Pero a pesar de esto, la idea de dimensiones extra ha prevalecido hasta nuestros días.

A pesar de su elegancia, la versión original de K-K fué eclipsada por el explosivo desarrollo de la Mecánica Cuántica y posteriormente de la Teoría Cuántica de Campos. Sin embargo mas tarde la física de partículas se encaminó eventualmente hacia un resurgimiento en el interés por la teoría de campos en dimensiones extra como una forma de unificar las interacciones de la física de largo y corto alcance. En este sentido es que la Teoría de K-K sentó los fundamentos para las teorías modernas de supergravedad en 11D y supercuerdas en 10D.

La teoría tradicional de Kaluza-Klein, también llamada teoría de Kaluza-Klein compacta, es esencialmente relatividad general en 5D y se caracteriza por ser restringida mediante las siguientes condiciones:

(a) La llamada condición de cilindridad fue introducida por Kaluza, y consiste en poner todas las derivadas parciales con respecto a la quinta coordenada, nulas.

(b) La condición de compactificación de la quinta coordenada fue introducida por Klein, y consiste en la suposición de que la quinta dimensión tiene una topología cerrada (una circunferencia si se considera sólo una dimensión extra). En este sentido se decía que la quinta dimensión debía ser compacta. Esta última restricción puede aplicarse retroactivamente a la solución e introduce periodicidad, permitiendo el uso de la descomposición de Fourier y de otras teorías de descomposición. Lógicamente las ecuaciones de campo se esperan de la forma  $G_{AB} = \kappa T_{AB}$ , donde  $A, B = 0, 1, 2, 3, 4$ , con alguna constante de acoplamiento pentadimensional apropiada  $\kappa$  y un tensor energía momento 5D. Sin embargo, desde la época de Kaluza y Klein se ha considerado por simplicidad un vacío aparente o vacío mediante el

empleo de las ecuaciones de campo  $G_{AB} = 0$ .

Kaluza estaba interesado en el electromagnetismo y se dió cuenta que el tensor métrico 5D  $g_{AB}$  puede expresarse en una forma que involucre los 4-potenciales  $A_\mu$  que aparecen en la teoría de electromagnética de Maxwell. En su trabajo estableció la condición de cilíndricidad y fijó la componente  $g_{44} = cte$ . Esta teoría fue ampliamente estudiada por varios investigadores incluyendo a Jordan [43], Bergmann [44], Lessner [46], Thiry [45], Liu y Wesson [47]. En forma ilustrativa podemos exponer la idea de Kaluza si consideramos  $g_{AB}(x^\alpha)$ ,  $g_{44} = -\phi^2(x^\alpha)$ , y hacemos una elección de coordenadas o gauge de forma que

$$g_{AB} = \begin{bmatrix} g_{\alpha\beta} - \kappa^2 \phi^2 A_\alpha A_\beta & -\kappa \phi^2 A_\alpha \\ -\kappa \phi^2 A_\beta & -\phi^2 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Si calculamos las ecuaciones de campo, estas pueden reducirse a

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\kappa^2 \phi^2}{2} T_{\alpha\beta} - \frac{1}{\phi} (\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi - g_{\alpha\beta} \square \phi), \quad (3.2)$$

$$\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = -3 \frac{\nabla^\alpha \phi}{\phi} F_{\alpha\beta}, \quad (3.3)$$

$$\square \phi = -\frac{\kappa^2 \phi^3}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (3.4)$$

Aquí  $G_{\alpha\beta}$  y  $F_{\alpha\beta}$  son los tensores de **Einstein** de la relatividad general y de **Faraday** de la electrodinámica;  $T_{\alpha\beta}$  es el tensor de energía-momento para un campo electromagnético dado por

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} - F_\alpha^\delta F_{\beta\delta} \right]. \quad (3.5)$$

Además  $\square \equiv g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$  es el operador D'alambertiano.

Podemos reconocer en la segunda de las expresiones a las 4 ecuaciones del electromagnetismo pero modificadas por una función, que por la última de las expresiones puede pensarse como dependiente de un campo escalar que cumple una ecuación de onda. De la primera de las expresiones obtenemos las 10 ecuaciones de Einstein de la relatividad general en 4D; pero con un término que representa de alguna forma a la energía y momento que son derivadas efectivamente de la quinta dimensión. Resumiendo, la teoría de

K-K es en general una forma de unificar la gravedad, el electromagnetismo y un campo escalar.

En el tratamiento de Kaluza  $g_{44} = -\phi^2 = -1$ , que junto con la identificación  $\kappa = \frac{4}{c^2}(\pi G)^{1/2}$  se obtienen las ecuaciones de Einstein

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}, \quad (3.6)$$

con las ecuaciones homogéneas de Maxwell

$$\nabla^\alpha F_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.7)$$

Estas ecuaciones se obtienen de un vacío 5D, una consecuencia que se suele denominar "*milagro*" de Kaluza-Klein.

De esta manera puede verse que la aproximación de Kaluza da un resultado interesante cuando se extiende la teoría de Einstein a un espacio-tiempo pentadimensional. Las quince ecuaciones de campo sobre la variedad pentadimensional se descomponen naturalmente en tres conjuntos diferentes. Un conjunto de diez ecuaciones que gobiernan la gravedad (2.29), cuatro que describen un campo vectorial que representa al electromagnetismo (2.30), y una ecuación de onda para un campo escalar (2.36). Vemos también que si el campo escalar fuera constante, las ecuaciones para el campo vectorial serían justamente las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo en el vacío, y las ecuaciones para el campo tensorial serían las ecuaciones de Einstein tetradimensionales con fuentes dadas por el campo electromagnético. En otras palabras, Kaluza obtuvo una teoría con un sólo campo covariante en cinco dimensiones que genera tanto la teoría de la relatividad general de Einstein como la teoría electromagnética de Maxwell, ambas en 4D. Sin embargo, esta teoría tiene algunos problemas. No es muy claro cuál es la naturaleza de la quinta dimensión. Tampoco hay ninguna explicación para la suposición ad hoc de que ninguno de los campos en el universo debe variar con respecto a la quinta dimensión, es decir, no hay justificación para el empleo de la condición de cilindricidad. Por último debe notarse que la teoría de Kaluza unifica gravedad con electromagnetismo sólo en el régimen de pequeñas velocidades. De acuerdo a Kaluza la carga eléctrica de una partícula esta relacionada con su velocidad  $U_4$  a través de la quinta dimensión de la forma

$$U_4 \propto \frac{\rho_{electrico}}{\rho_{masa}}. \quad (3.8)$$

Pero, para un electrón o un protón el cociente no es pequeño y así  $U_4$  debe ser extremadamente grande. Esto significa que en el límite de bajas velocidades la teoría puede explicar fenómenos macroscópicos pero el problema surge con respecto a la aplicabilidad de la teoría a las partículas elementales.

Así, la teoría original de Kaluza presentaba dos problemas. El primero era la falta de explicación para la restricción de cilindridad: aunque los índices tomaban valores 0, 1, 2, 3, 4 los campos no dependían de la quinta coordenada. El otro, radicaba en la pregunta: *si hay una quinta dimensión entonces, por qué no la vemos?*

Fue Oskar Klein en 1926, quien vino a dar una solución a ambos problemas. Klein supuso que la quinta dimensión debía ser compacta y con una topología circular (la topología de  $S(1)$ ), con un radio del orden de la longitud de Planck. De esta forma el espacio-tiempo 5D tenía la topología  $\mathfrak{R}^4 \times S(1)$ , y la quinta coordenada  $\psi$  era periódica:  $\frac{\psi}{r} \in [0, 2\pi]$ , donde  $r$  es el radio de la circunferencia  $S(1)$ . Resulta complicado imaginar un espacio-tiempo con esta topología, sin embargo la analogía más simple que puede darse es la de una manguera. Una manguera a grandes distancias nos parece como una línea  $\mathfrak{R}^1$ , pero cuando nos acercamos vemos que para cada punto sobre la línea hay un pequeño círculo, y de esta manera su topología es  $\mathfrak{R}^1 \times S(1)$ . Así, lo que Klein sugirió fue que a cada punto del espacio-tiempo 4D le correspondía una pequeña circunferencia. Este es el origen de la condición de compactificación de la quinta coordenada  $\psi$ . En otras palabras, la idea básica es que hay cuatro dimensiones espaciales y una de ellas es compacta con un radio muy pequeño. Y como resultado de esto en todos los experimentos vemos sólo los efectos de cuatro dimensiones, una temporal y tres espaciales. De esta manera, Klein hizo que la condición de cilindridad de Kaluza fuera menos artificial. Este mecanismo de compactificación llegó a ser de notable interés en las teorías gravitacionales de tal manera que en la actualidad una teoría de la gravedad sobre un espacio tiempo compacto se llama teoría de Kaluza-Klein.

En resumen, la teoría tradicional de K-K es en general una teoría que nos brinda una manera de unificar gravedad y electromagnetismo por medio de un campo escalar a nivel clásico. En el lenguaje de física de partículas y de la teoría cuántica de campos moderna, las ecuaciones de campo  $G_{AB} = 0$ , en la teoría de K-K compacta describen un gravitón de espín 2, un fotón de espín 1 y un bosón de espín 0, los cuales a través del campo escalar  $\phi$  pueden conectarse con el problema de cómo las partículas adquieren masa. Sin embargo, esta teoría tiene algunos problemas que la colocan en serias

contradicciones con las evidencias experimentales. Uno de los problemas más importantes es que en esta teoría los fermiones carecen de quiralidad en 5D. A pesar de esto, los intentos por unificar gravedad con electromagnetismo siguieron su curso de tal manera que siguieron muchas versiones modificadas de la teoría de K-K. Entre ellas teorías que incorporaban numerosas y extremadamente pequeñas dimensiones extra. De hecho este fue el origen de la teoría de cuerdas que a su vez dió lugar posteriormente a la teoría de Supercuerdas en 10D y Supergravedad en 11D.

La idea de K-K de dimensiones extra sigue estando presente en las nuevas teorías sólo que de manera muy diferente a la versión original. De hecho otra de las modificaciones hechas a la teoría de K-K es la idea de que la quinta coordenada es no compacta, es decir, extendida y que los efectos de esta coordenada extra se manifiestan en el comportamiento de la materia en 4D. Este tipo de teorías se conocen con el nombre de teorías de Kaluza-Klein no compactas. La teoría Espacio-Tiempo-Materia (STM) o teoría de Materia Inducida (TMI) es una de este tipo, y sobre la cual en esta tesis construiremos un formalismo para las fluctuaciones cosmológicas durante inflación.

### 3.2 Axiomas de TMI

El sustento matemático de que la materia en cuatro dimensiones puede explicarse desde una variedad Riemanniana 5D Ricci-plana  $R_{AB} = 0$  surge a partir del teorema de Campbell-Magaard, que dice:

*”Cualquier variedad pseudo-Riemanniana analítica  $N$ -dimensional puede ser localmente inmersa en una variedad  $(N+1)$ -dimensional con el tensor de Ricci nulo (en este caso decimos que la variedad es Ricci-plana).”*

Esto es de gran importancia para establecer las generalidades necesarias para proponer que las ecuaciones de campo 4D con fuentes pueden ser localmente inmersas en ecuaciones de campo 5D sin fuentes [33]. Por otro lado, hace dos años E. Anderson observó que este teorema ofrece un soporte inadecuado para la TMI, algunos modelos de branas y teorías de cuerdas de bajas energías ya que *no dan garantías acerca de la dependencia continua de los datos porque descuida la causalidad* [48]. En su trabajo, sin embargo señala que el teorema de Campbell-Magaard es sólo válido para funciones analíticas, que resultan ser inapropiadas para el estudio de las ecuaciones de campo relativistas de la física moderna. Sin embargo, las funciones analíticas

parecen ser sólo inapropiadas para describir defectos topológicos como agujeros negros, pero no para estudiar modelos cosmológicos para los cuales la variedad es global y libre de singularidades. Ver también los comentarios de P.Wesson en [49].

Cuatro meses después del trabajo de Anderson, N.I.Katzourakis [50] demostró la **primera generalización global del teorema de Campbell**, al remover la condición de localidad. Dando la extensión requerida para dar soporte matemático a todas las teorías físicas basadas en la inmersión de la relatividad general de Einstein en una variedad  $(4+d)$ -dimensional.

*”Cualquier variedad pseudo-Riemanniana analítica  $N$ -dimensional puede ser inmersa, toda la estructura, natural e isométricamente en un  $(N+1)$ -bulk (variedad de dimensión superior que contiene al espacio-tiempo  $4D$ ) con una estructura topológica arbitraria prefijada, construida sobre la dada, con una curvatura de Ricci y torsión nulas de alguna conexión localmente compatible con una métrica global en el bulk”.*

Mas generalmente demostró que:

*”Cualquier variedad  $4D$  con un campo tensorial global que representa la solución de las ecuaciones de Einstein de la relatividad general en  $4D$  puede ser inmerso natural e isométricamente en una variedad  $(4+d)D$  Ricci-plana y de torsión nula (símbolos de Christoffel simétricos), donde la topología global, la estructura diferencial y la dimensionalidad del bulk puede ser fijada arbitrariamente.”*

Dada la justificación matemática podemos introducir el primer postulado de la TMI.

(1) *”Nuestro espacio-tiempo ordinario  $\mathcal{M}^4$  puede representarse como una hipersuperficie  $4D$   $\Sigma^4$  local e isométricamente inmersa en una variedad diferenciable Ricci-plana  $\mathcal{M}^5$ .”*

El elemento de línea 5D  $dS^2 = g_{AB}dx^A dx^B$  puede ponerse por lo menos localmente en la forma



$$dS^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + \epsilon \phi^2 d\psi^2, \quad (3.9)$$

donde  $x^A = (x^\alpha, \psi)$ ,  $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta(x^A)}$ ,  $\phi = \phi_{(x^A)}$  y  $\epsilon = \pm 1$ , dependiendo de si la 5ta coordenada es tipo tiempo o tipo espacio. Asumimos que  $\mathcal{M}^4$  puede identificarse con una hipersuperficie  $\Sigma^4$  definida por la ecuación  $\psi = \psi_0 = cte$ . Luego tenemos una métrica inducida sobre  $\Sigma^4$

$${}^{(4)}g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta(x^\mu, \psi_0)}. \quad (3.10)$$

Imponemos la condición de vacío aparente  ${}^{(5)}R_{AB} = 0$  y escribimos al Ricci 5D en términos de los símbolos de Christoffel 5D

$${}^{(5)}R_{AB} = \Gamma_{AB,C}^C - \Gamma_{AC,B}^C + \Gamma_{AB}^C \Gamma_{CD}^D + \Gamma_{AD}^C \Gamma_{CB}^D = 0. \quad (3.11)$$

Tomando  $A \rightarrow \alpha$ ,  $B \rightarrow \beta$ ; en la ecuación anterior, obtendremos las componentes 4D del Ricci 5D. Se ve que

$${}^{(5)}R_{\alpha\beta} = 0 = {}^{(4)}R_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta,\psi}^\psi - \Gamma_{\alpha\psi,\beta}^\psi + \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \Gamma_{\rho\psi}^\psi + \Gamma_{\alpha\rho}^\psi \Gamma_{\psi\beta}^\rho - \Gamma_{\alpha\rho}^\psi \Gamma_{\beta\psi}^\rho - \Gamma_{\alpha\psi}^\rho \Gamma_{\beta\rho}^\psi,$$

donde  ${}^{(4)}R_{\alpha\beta}$  puede verse como el tensor de Ricci 4D calculado con la métrica  ${}^{(4)}g_{\alpha\beta(x^\mu)}$  habiendo definido  $\psi = \psi_0$ . Finalmente puede verse que las ecuaciones de Einstein del vacío 5D  $G_{AB} = 0$  pueden escribirse separadamente en la forma

$${}^{(4)}G_{\alpha\beta} = \kappa {}^{(4)}T_{\alpha\beta}, \quad (3.12)$$

donde  ${}^{(4)}T_{\alpha\beta}$  es interpretado como el tensor de energía-momento de la materia ordinaria 4D y explícitamente es

$${}^{(4)}T_{\alpha\beta} = \frac{\phi_{\alpha;\beta}}{\phi} - \frac{\epsilon}{2\phi^2} \left[ \frac{\phi_{,\psi} g_{\alpha\beta,\psi}}{\phi} - g_{\alpha\beta,\psi\psi} + g^{\nu\mu} g_{\alpha\nu,\psi} g_{\beta\mu,\psi} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\psi} g_{\alpha\beta,\psi} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} [g_{\psi}^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\psi} + (g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\psi})^2] \right] \quad (3.13)$$

$$\epsilon \phi \square \phi = -\frac{1}{4} g_{,4}^{\lambda\beta} g_{\lambda\beta,4} - \frac{1}{2} g^{\lambda\beta} g_{\lambda\beta,44} + \frac{1}{2\phi} \phi_{,4} g^{\lambda\beta} g_{\lambda\beta,4} \quad (3.14)$$

es la ecuación para un escalar  $\phi$  y

$$P_{\alpha;\beta}^{\beta} = 0, \quad (3.15)$$

una ecuación de conservación con

$$P_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\sqrt{g_{44}}} (g_{\alpha\beta,4} - g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,4}). \quad (3.16)$$

(2) "El tensor de energía-momento que describe la materia contenida en nuestro universo 4D esta dado por la ecuación anterior para  ${}^{(4)}T_{\alpha\beta}$ "

La TMI se ha considerado en la literatura como una teoría de *inmersión*, es decir, una teoría que asume como primer principio que nuestro espacio-tiempo ordinario se corresponde con una hipersuperficie perteneciente a una variedad extra dimensional (en este caso un espacio 5D Ricci-plano). En este sentido, la teoría *Brane-World*(BW) [51] podría también llamarse una teoría de inmersión ya que la brana que modela nuestro universo observable se puede ver como una hipersuperficie 4D inmersa en una variedad 5D anti-deSitter (the bulk). La relación entre TMI y BW es analizada en [52]. Por otro lado, cuando se trata de la dinámica de partículas de prueba en TMI, implícitamente se asume que los caminos de estas se corresponden con curvas en la variedad 5D, no necesariamente confinadas a la hipersuperficie  $\Sigma^4 \subset \mathcal{M}^5$ . Con respecto a este detalle, recordamos que en branas la materia y la radiación están confinadas a la brana, aunque en el régimen de altas energías las partículas como los gravitones pueden abandonar la brana. Recientes resultados en teorías de cuerdas sugieren que la gravedad efectivamente es una interacción multidimensional, y que la relatividad general usual en 4D es el límite de bajas energías de una teoría mas general. En estas teorías los campos de materia se encuentran confinados a nuestro espacio-tiempo 4D inmerso en un espacio-tiempo (4+d)D, mientras que los campos gravitatorios se propagan también en las d-dimensiones extras. En este caso los efectos del movimiento en 5D se esperan que aparezcan como una fuerza que afecta el movimiento en 4D.

#### DOS INTERPRETACIONES PARA NUESTRO UNIVERSO 4D

(i) **Foliación:** esta interpretación hace uso de la congruencia de un campo vectorial  $V$  dado, definido en  $\mathcal{M}^5$  y asumir implícitamente que las ecuaciones que gobiernan las leyes observadas en 4D son de alguna forma *proyecciones* de las ecuaciones de 5D en la foliación de hipersuperficies  $\{\Sigma\}$  ortogonales

a  $V$ . En esta interpretación la dinámica se determina induciendo la métrica de  $\mathcal{M}^5$  sobre las hojas.

(ii)**Inmersión:** aquí se asume también que la variedad fundamental 5D  $\mathcal{M}^5$  puede foliarse en hipersuperficies  $\{\Sigma\}$  ortogonales a un campo vectorial  $V$ . Sin embargo, la geometría del espacio-tiempo 4D no se supone enteramente determinada por la foliación, sino por una hoja en particular  $\Sigma^4$  seleccionada del conjunto  $\{\Sigma\}$ , en donde se induce un tensor métrico a partir de la variedad  $\mathcal{M}^5$ . En esta interpretación la dinámica se determina en término de cantidades geométricas definidas exclusivamente de  $\Sigma^4$ .

Introducimos luego el tercer postulado.

(3) "Los caminos que corresponden al movimiento de partículas libres de prueba y rayos de luz son líneas geodésicas en el espacio Ricci-plano de 5D".

### 3.2.1 Una aplicación general de TMI

#### I. UNIVERSO ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICO

Para apreciar físicamente lo que significa el tensor inducido  ${}^{(4)}T_{\alpha\beta}$ , debemos especificar una métrica  $g_{AB}$  para nuestra variedad pentadimensional  $\mathcal{M}^5$ . Preferiblemente esta debe ser simple matemáticamente, pero lo suficientemente general como para ser ampliamente aplicable. En este sentido, proponemos el elemento de línea *general del 5-universo con simetría esférica* [34]

$$dS^2 = e^{\nu(t,r,\psi)} dt^2 - e^{\lambda(t,r,\psi)} dr^2 - R_{(t,r,\psi)}^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) + \epsilon e^{\mu(t,r,\psi)} d\psi^2 \quad (3.17)$$

donde  $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $R$  son funciones arbitrarias del tiempo  $t$ , de la coordenada radial  $r = |\vec{r}|$  y de la quinta coordenada  $\psi$ . Las componentes no nulas del tensor de energía-momento inducido son

$$8\pi GT_0^0 = -e^{-\nu}\mu_{,t}\left(\frac{\lambda_{,t}}{4} + \frac{R_{,t}}{R}\right) + e^{-\lambda}\mu_{,r}\left(\frac{R_{,r}}{R} - \frac{\lambda_{,r}}{4} + \frac{\mu_{,rr}}{2\mu_{,r}} + \frac{\mu_{,r}}{4}\right) \\ - \epsilon e^{-\mu}\left[\frac{\lambda_{,\psi\psi}}{2} + \frac{\lambda_{,\psi}^2}{4} - \frac{\mu_{,\psi}\lambda_{,\psi}}{4} + \frac{R_{,\psi}}{R}(\lambda_{,\psi} - \mu_{,\psi}) + \frac{R_{,\psi}^2}{R^2} + 2\frac{R_{,\psi\psi}}{R}\right],$$

$$8\pi GT_0^1 = -\frac{e^{-\lambda}}{4}(2\mu_{,tr} + \mu_{,t}\mu_{,r} - \nu_{,r}\mu_{,t} - \lambda_{,t}\mu_{,r}),$$

$$8\pi GT_1^1 = -e^{-\nu}\left[\frac{\mu_{,tt}}{2} + \frac{\mu_{,t}^2}{4} - \frac{\nu_{,t}\mu_{,t}}{4} + \frac{R_{,t}\mu_{,t}}{R}\right] + e^{-\lambda}\mu_{,r}\left[\frac{R_{,r}}{R} + \frac{\nu_{,r}}{4}\right] \\ - \epsilon \frac{e^{-\mu}}{R}\left[\frac{R_{,\psi}^2}{R} + 2R_{,\psi\psi} + R_{,\psi}(\nu_{,\psi} - \mu_{,\psi}) + \frac{\nu_{,\psi\psi}}{2} + \frac{\nu_{,\psi}^2}{4} - \frac{\nu_{,\psi}\mu_{,\psi}}{4}\right],$$

$$8\pi GT_2^2 = -\frac{e^{-\nu}\mu_{,t}}{4}\left(\frac{2R_{,t}}{R} - \nu_{,t} + \lambda_{,t} + \mu_{,t} + \frac{2\mu_{,tt}}{\mu_{,t}}\right) + \frac{e^{-\lambda}\mu_{,r}}{4}\left(\frac{2R_{,r}}{R} + \frac{2\mu_{,rr}}{\mu_{,r}}\right. \\ \left. + \mu_{,r} - \lambda_{,r} + \nu_{,r}\right) - \epsilon \frac{e^{-\mu}}{4R}[4R_{,\psi\psi} + 2R_{,\psi}(\nu_{,\psi} + \lambda_{,\psi} - \mu_{,\psi}) \\ + 2R(\nu_{,\psi\psi} + \lambda_{,\psi\psi} + \nu_{,\psi}^2 + \lambda_{,\psi}^2 + \nu_{,\psi}\lambda_{,\psi} - \nu_{,\psi}\mu_{,\psi} - \mu_{,\psi}\lambda_{,\psi})],$$

$$T_3^3 = T_2^2.$$

Si uno asume que esta materia inducida tiene la forma de un fluido perfecto,

$$T_{\beta}^{\alpha} = (\rho + p)u^{\alpha}u_{\beta} - p\delta_{\beta}^{\alpha} \quad (3.18)$$

donde  $u^{\alpha}$  es la 4-velocidad de los elementos de fluido, luego la densidad  $\rho$  y la presión  $p$  pueden identificarse [53] de las relaciones,  $\rho = T_0^0 + T_1^1 - T_2^2$  y  $p = -T_2^2$ . Teniendo en cuenta esto último podemos escribir

$$8\pi G\rho = \frac{3}{2R}(e^{-\mu}\mu_{,r}R_{,r} - e^{\nu}\mu_{,t}R_{,t}) + \\ + \epsilon \frac{4e^{-\mu}}{R}\left[R\nu_{,\psi}\lambda_{,\psi} + 2R_{,\psi}(3\mu_{,\psi} - \lambda_{,\psi} - \nu_{,\psi}) - 8\frac{R_{,\psi}^2}{R} - 12R_{,\psi\psi}\right],$$

$$8\pi Gp = \frac{1}{2R}(e^{-\mu}\mu_{,r}R_{,r} - e^{\nu}\mu_{,t}R_{,t}) + \\ + \epsilon \frac{4e^{-\mu}}{R}[R\nu_{,\psi}\lambda_{,\psi} + 2R_{,\psi}(\mu_{,\psi} + \lambda_{,\psi} + \nu_{,\psi}) - 4R_{,\psi\psi}].$$

Si imponemos la condición de cilindricidad de Kaluza (todas las derivadas respecto a la quinta coordenada nulas), se obtiene sólo radiación  $p = \rho/3$ . Sin embargo, si relajamos la condición se obtiene una ecuación de estado muy *general*. Por ejemplo, se puede separar la presión y la densidad en cuatro partes  $\rho = \rho_{rad} + \rho_{pol} + \rho_{vac} + \rho_{rig}$  y  $p = p_{rad} + p_{pol} + p_{vac} + p_{rig}$ , con las ecuaciones de estado para radiación  $p_{rad} = \rho_{rad}/3$ , para polvo  $p_{pol} = 0$ , para el vacío  $p_{vac} = -\rho_{vac}$  y de materia rígida  $p_{rig} = \rho_{rig}$ . Con esto resulta

$$\begin{aligned}\rho_{rad} &= \frac{3}{16\pi G} \left( \frac{e^{-\lambda}\mu_{,r} - e^{-\nu}\mu_{,t}R_{,t}}{R} \right) + \frac{3}{16\pi G} \epsilon e^{-\mu} \left( \frac{R_{,\psi}\mu_{,\psi} - 2R_{,\psi\psi}}{R} \right), \\ \rho_{pol} &= -\epsilon \frac{e^{-\mu}}{4\pi G} \left( \frac{R_{,\psi}}{R} \right)^2, \\ \rho_{vac} &= \epsilon \frac{e^{-\mu}}{16\pi G} R_{,\psi}(\nu_{,\psi} + \lambda_{,\psi}), \\ \rho_{rig} &= \epsilon \frac{e^{-\mu}}{32\pi G} \nu_{,\psi}\lambda_{,\psi}.\end{aligned}$$

De la primera de estas ecuaciones, se ve que en un universo dominado por radiación en el que los coeficientes métricos sólo dependen del tiempo, la quinta dimensión debe contraerse con el tiempo ( $\mu_{,t} < 0$ ) para tener expansión espacial ( $R_{,t} > 0$ ) y densidad positiva ( $\rho_{rad} > 0$ ). De la segunda de las ecuaciones se sigue que en un universo dominado por polvo la quinta dimensión debe ser tipo espacio para que la densidad de energía sea positiva ( $\rho_{pol} > 0$ ). Lo notable de la teoría K-K no compacta es que estas condiciones surgen de las ecuaciones de campo, a diferencia de la teoría compacta en que deben ser asumidas para resolver el problema del horizonte y de planaridad al introducir entropía de la dimensión extra al universo 4D [54], o para explicar porque la quinta dimensión es compacta [55].

## II. UNIVERSO ISOTRÓPICO Y HOMOGÉNEO

Supongamos que el elemento de línea lo reescribimos en una forma espacialmente isotrópica

$$dS^2 = e^\nu dt^2 - e^\omega (dr^2 + r^2 d\Omega^2) + \epsilon e^\mu d\psi^2, \quad (3.19)$$

donde  $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2$ . Si asumimos que  $\nu$ ,  $\omega$  y  $\mu$  son funciones

*separables* de las coordenadas  $t$ ,  $r$  y  $\psi$ ; pueden obtenerse soluciones a las ecuaciones de campo  $R_{AB} = 0$  donde las propiedades de la materia, especificadas por el tensor inducido de energía-momento, coinciden con aquellas esperadas en la teoría 4D.

Si consideramos únicamente dependencia con el tiempo, la métrica anterior es una generalización de la cosmología plana, homogénea e isotrópica de Friedmann-Robertson- Walker (FRW). Pero, en el contexto de la teoría de K-K no compacta podemos esperar también dependencia con la coordenada extra  $\psi$ . Así, asumiendo separabilidad:

$$e^\nu \equiv T_{(t)}^2 X_{(\psi)}^2, \quad e^\omega \equiv U_{(t)}^2 Y_{(\psi)}^2, \quad e^\mu \equiv V_{(t)}^2 Z_{(\psi)}^2. \quad (3.20)$$

Ponce de León [35] fue el primero en investigar soluciones a las ecuaciones de Einstein en el vacío 5D. Una de estas soluciones es la que induce una métrica de Sitter efectiva. Estableciendo:

$$\begin{aligned} T_{(t)} &= T_0, & X_{(\psi)} &\propto \psi, \\ U_{(t)} &\propto \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t\right), & Y_{(\psi)} &\propto \psi \\ V_{(t)} &= V_0, & Z_{(\psi)} &= Z_0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

por lo que la métrica se reduce a

$$dS^2 = \psi^2 dt^2 - \psi^2 e^{2\sqrt{\Lambda/3} t} dr^2 - d\psi^2. \quad (3.22)$$

En las hipersuperficies del espacio-tiempo  $\psi = \psi_0 = cte$  se obtiene la métrica de Sitter, y  $\Lambda \equiv \frac{3}{\psi_0^2}$  es una constante cosmológica inducida en el espacio-tiempo 4D por la existencia de la quinta coordenada  $\psi$ . La ecuación de estado de la "materia" inducida en 4D es aquella del vacío de Sitter clásico,  $p = -\rho$  con  $\rho = \frac{\Lambda}{8\pi G}$ .

### 3.3 Inflación desde TMI

En esta sección expondremos brevemente las ideas desarrolladas por M.Bellini y J.E.Madriz Aguilar sobre cosmología inflacionaria desde una teoría de

Kaluza-Klein no compacta. En sus trabajos [58, 62] dieron un origen geométrico al potencial inflacionario, al lograr construir un modelo inflacionario 5D en el cual el potencial no es introducido arbitrariamente, a diferencia de los modelos 4D donde este es introducido a mano.

### 3.3.1 Formalismo 5D

La idea primigenia, al igual que en la teoría de Kaluza-Klein compacta, es explicar a partir de un vacío aparente 5D la materia que vemos en un espacio-tiempo 4D. A diferencia de la teoría clásica de Kaluza-Klein, no imponemos ninguna condición de compactificación sobre la quinta coordenada. En lugar de eso, dejaremos evolucionar la quinta coordenada de acuerdo al principio de mínima acción 5D manifestado en la ecuación de geodésicas 5D.

En el sistema de coordenadas locales  $(N, x, y, z, \psi)$ , consideremos el elemento de línea de universo pentadimensional

$$dS^2 = \psi^2 dN^2 - \psi^2 e^{2N} dr^2 - d\psi^2, \quad (3.23)$$

donde  $\vec{dr}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ . Las coordenadas  $(N, \vec{r})$  son adimensionales, la quinta coordenada  $\psi$  tiene unidades de longitud. Esta métrica describe un universo ideal, 3D espacialmente isotrópico, homogéneo y plano [60]. Además, la métrica de fondo es globalmente plana, es decir, satisface  $R_{BCD}^A = 0$ , por lo cual  $G_{AB} = 0$ , y luego describe un universo 5D vacío.

Las ecuaciones pentadimensionales de Einstein  $G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB} = 0$  pueden obtenerse al minimizar la variación pentadimensional de la acción de Einstein-Hilbert usual:

$$I_{grav} = - \int_{\mathcal{M}} d^4x d\psi \sqrt{\left(\frac{|^{(5)}g|}{|^{(5)}g_0|}\right)} \left[ \frac{{}^{(5)}R}{16\pi G} \right], \quad (3.24)$$

respecto a la métrica 5D.

Aquí  $G = M_p^{-2}$  es la constante gravitacional,  $M_p = 1.2 \times 10^{19} GeV$  es la masa de Planck y  ${}^{(5)}R$  es el escalar de curvatura 5D de Ricci. Por otro lado  $|^{(5)}g| = \psi^8 e^{6N}$  es el valor absoluto del determinante del tensor métrico 5-dimensional  $g_{AB}$ . Además  $|^{(5)}g_0| = \psi_0^8 e^{6N_0}$  es una constante de dimensionalización, determinada al evaluar  $|^{(5)}g|$  al momento en que finaliza inflación, es decir cuando  $\ddot{b} = 0$ , donde  $b(t)$  es el parámetro de escala. Aquí consideraremos que  $N_0 = 0$ , por lo que  $|^{(5)}g_0| = \psi_0^8$ .

La acción de materia de la que se deriva el tensor de energía-momento es

$$I_{materia} = - \int_{\mathcal{M}} d^4x d\psi \sqrt{\left(\frac{|^{(5)}g|}{|^{(5)}g_0|}\right)} {}^{(5)}L(\varphi; \varphi_{,A}). \quad (3.25)$$

Para describir materia neutra en nuestra variedad 5-dimensional en vacío aparente, la lagrangiana debe contener un campo escalar real libre  $\varphi$  en 5D (el inflatón)

$${}^{(5)}L = \frac{1}{2} g^{AB} \varphi_{,A} \varphi_{,B}, \quad (3.26)$$

en la cual no aparece ningún término de potencial 5-dimensional  $V[\varphi]$ .

La dinámica para el campo inflatón  $\varphi$  es determinada por las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial N} - e^{-2N} \nabla_r^2 \varphi - \psi \left[ \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right] = 0. \quad (3.27)$$

Aquí realizamos un mapeo  $\varphi_{(N, \vec{r}, \psi)} = \left(\frac{\psi_0}{\psi}\right)^2 e^{3N/2} \phi_{(N, \vec{r}, \psi)}$  como en [61] y llegamos a una ecuación de Klein-Gordon generalizada para el campo inflatón redefinido  $\phi$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial N^2} - \left[ e^{-2N} \nabla_r^2 + \left( \psi^2 \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{1}{4} \right) \right] \phi = 0. \quad (3.28)$$

Para cuantificarlo establecemos una relación de conmutación entre el campo  $\varphi$  y su momento canónico conjugado [62]  $\Pi^N = \frac{\partial L}{\partial \varphi_{,N}} = g^{NN} \varphi_{,N}$

$$\left[ \varphi_{(N, \vec{r}, \psi)}, \Pi_{(N, \vec{r}', \psi')}^N \right] = i g^{NN} \left| \frac{{}^{(5)}g_0}{{}^{(5)}g} \right| \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\psi - \psi'). \quad (3.29)$$

La expansión del campo en sus modos de Fourier en 5D es

$$\begin{aligned} \phi_{(N, \vec{r}, \psi)} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_r \int dk_\psi \left[ b_{k_r k_\psi} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} + k_\psi \cdot \psi)} \eta_{k_r k_\psi}(N, \psi) + \right. \\ &\quad \left. + b_{k_r k_\psi}^\dagger e^{-i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} + k_\psi \cdot \psi)} \eta_{k_r k_\psi}^*(N, \psi) \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$



La cuantificación del campo  $\phi$  debe obedecer la relación de conmutación

$$\left[ \phi_{(N, \vec{r}, \psi)}, \frac{\partial \phi}{\partial N}(N, \vec{r}', \psi') \right] = i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\psi - \psi'). \quad (3.31)$$

Para ello  $b_{k_r k_\psi}$  y  $b_{k_r k_\psi}^\dagger$  deben ser operadores de creación y destrucción convencionales de los autoestados del espacio 5D de impulsos del campo  $\phi$ . Las relaciones de conmutación que cumplen son

$$\left[ b_{k_r k_\psi}, b_{k_r' k_\psi'}^\dagger \right] = \delta^{(3)}(\vec{k}_r - \vec{k}_r') \delta(k_\psi - k_\psi'), \quad \left[ b_{k_r k_\psi}, b_{k_r' k_\psi'} \right] = \left[ b_{k_r k_\psi}^\dagger, b_{k_r' k_\psi'}^\dagger \right] = 0. \quad (3.32)$$

Sustituyendo la expansión de Fourier (3.30) en el conmutador (3.31) y teniendo en cuenta las relaciones de conmutación de los operadores de creación y destrucción (3.32), se obtiene la **condición de normalización para los modos**  $\eta_{k_r k_\psi}(N, \psi)$

$$\eta_{k_r k_\psi}(N, \psi) \eta_{k_r k_\psi}^{*'} - \eta_{k_r k_\psi}^* \eta_{k_r k_\psi}' = i, \quad (3.33)$$

donde  $(') \equiv \frac{\partial}{\partial N}$ . La ecuación para los modos  $\eta_{k_r k_\psi}(N, \psi)$  es

$$\frac{\partial^2 \eta_{k_r k_\psi}}{\partial N^2} + k_r^2 e^{-2N} - \psi^2 \left[ k_\psi^2 - 2i k_\psi \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - \frac{1}{4\psi^2} \right] \eta_{k_r k_\psi} = 0, \quad (3.34)$$

Para resolver esta ecuación proponemos la separación

$$\eta_{k_r k_\psi}(N, \psi) = \eta_{k_r(N)}^{(1)} \eta_{k_\psi(\psi)}^{(2)}, \quad (3.35)$$

tal que (3.34) puede escribirse mediante el sistema de ecuaciones ordinarias

$$\frac{d^2 \eta_{k_r}^{(1)}}{dN^2} + [k_r^2 e^{-2N} - \beta] \eta_{k_r}^{(1)} = 0, \quad (3.36)$$

$$\frac{d^2 \eta_{k_\psi}^{(2)}}{d\psi^2} + 2i k_\psi \frac{d\eta_{k_\psi}^{(2)}}{d\psi} - \left[ k_\psi^2 - \frac{1}{\psi^2} \left( \frac{1}{4} - \beta \right) \right] \eta_{k_\psi}^{(2)} = 0, \quad (3.37)$$

donde  $\beta = k_\psi^2 \psi^2$  es una constante adimensional. Las soluciones de las ecuaciones anteriores son

$$\eta_{k_r[x(N)]}^{(1)} = A_1 \mathcal{H}_\lambda^{(1)}[x(N)] + A_2 \mathcal{H}_\lambda^{(2)}[x(N)], \quad (3.38)$$

$$\eta_{k_\psi(\psi)}^{(2)} = e^{-ik_\psi \cdot \psi} \left[ B_1 \psi^{(\frac{1}{2} + \sqrt{\beta})} + B_2 \psi^{(\frac{1}{2} - \sqrt{\beta})} \right], \quad (3.39)$$

donde  $\mathcal{H}_\lambda^{(1,2)}[x(N)]$  son las funciones de Hankel, con  $\lambda = \sqrt{\beta}$  y  $x(N) = k_r e^{-N}$ . Las constantes arbitrarias  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  son restringidas por la condición de normalización (3.33) de forma tal que

$$(A_1 - A_2)(A_1 + A_2) \left[ B_1 \psi^{\frac{1}{2} + \lambda} + B_2 \psi^{\frac{1}{2} - \lambda} \right]^2 = \frac{\pi}{4}. \quad (3.40)$$

Estableciendo la condición de vacío de Bunch-Davies generalizada, dada en este caso al definir  $A_1 = B_1 = 0$  en la ecuación anterior, se obtiene  $A_2 = \frac{i\sqrt{\pi}}{2B_2}$  constante cuando  $\beta = 1/4$ . De esta manera, la solución de (3.34) con la condición (3.40) está dada por

$$\eta_{k_r k_\psi(N, \psi)} = \frac{i\sqrt{\pi}}{2} e^{-ik_\psi \cdot \psi} \mathcal{H}_{1/2}^{(2)}[k_r e^{-N}]. \quad (3.41)$$

Podemos escribir la última ecuación de la siguiente forma

$$\eta_{k_r k_\psi(N, \psi)} = e^{-ik_\psi \cdot \psi} \tilde{\eta}_{k_r k_\psi(N)}, \quad (3.42)$$

donde  $\tilde{\eta}_{k_r k_\psi(N)} = \frac{i\sqrt{\pi}}{2} \mathcal{H}_{1/2}^{(2)}[k_r e^{-N}]$ . Con esto, volvemos a la expansión de Fourier en 5D (3.30) que queda escrita

$$\begin{aligned} \phi_{(N, \vec{r}, \psi)} = \phi_{(N, \vec{r})} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_r \int dk_\psi \left[ b_{k_r k_\psi} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \tilde{\eta}_{k_r k_\psi(N)} + \right. \\ &\left. + b_{k_r k_\psi}^\dagger e^{-i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \tilde{\eta}_{k_r k_\psi(N)}^* \right]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Así, el campo escalar  $\varphi$  puede escribirse en función del campo redefinido  $\phi$  en la forma

$$\varphi_{(N,\vec{r},\psi)} = \left(\frac{\psi_0}{\psi}\right)^2 e^{3N/2} \phi_{(N,\vec{r})}, \quad (3.44)$$

con  $\phi_{(N,\vec{r})}$  dado por (3.43). Una consecuencia muy importante de este resultado es que  $\varphi_{(N,\vec{r},\psi)}$  se propaga sólo sobre la parte espacialmente isotrópica 3D,  $r(x, y, z)$ , pero no sobre la coordenada adicional tipo espacio  $\psi$ . Esto nos sugiere que el campo de materia se propaga únicamente en la subvariedad 4D descrita por las coordenadas  $(N, \vec{r})$ .

### 3.3.2 Expansión de Sitter 4D efectiva

Para describir la métrica (3.23) en coordenadas físicas podemos hacer las siguientes transformaciones

$$t = \psi_0 N, \quad R = \psi_0 r, \quad \psi = \psi, \quad (3.45)$$

tal que obtenemos el elemento de línea 5D

$$dS^2 = \left(\frac{\psi}{\psi_0}\right)^2 \left[ dt^2 - e^{\frac{2t}{\psi_0}} dR^2 \right] - d\psi^2, \quad (3.46)$$

donde  $t$  es el tiempo cósmico y  $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ . Esta métrica es la de Jaime Ponce de León [35] y describe un universo plano, homogéneo e isotrópico extendido a una métrica de FRW 5D en un expansión de Sitter [34]

Para estudiar la evolución de Sitter del universo sobre un espacio-tiempo 4D podemos tomar la foliación  $\psi = \psi_0$  en la métrica (3.46), tal que la métrica efectiva 4D resulta

$$dS^2 \rightarrow ds^2 = dt^2 - e^{\frac{2t}{\psi_0}} dR^2. \quad (3.47)$$

Esta métrica describe un universo espacialmente homogéneo, isotrópico y plano, que se expande con un parámetro de Hubble  $H = \psi_0^{-1}$ , que es constante sobre la hipersuperficie. El escalar de curvatura es  ${}^{(4)}R = 6(H_{,t} + 2H^2)$ . En nuestro caso particular el parámetro de Hubble es una constante:  $H_{,t} = 0$ .

La densidad de energía  $\rho$  y la presión  $P$  en la hipersuperficie son

$$8\pi G\langle\rho\rangle = \frac{3}{\psi_0^2}, \quad (3.48)$$

$$8\pi G\langle P\rangle = -\frac{3}{\psi_0^2}. \quad (3.49)$$

El universo describe una ecuación de estado de vacío  $P = -\rho$  tal que

$$\langle\rho\rangle = \left\langle \frac{\varphi_{,t}^2}{2} + \frac{b_0^2}{2b}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + V(\varphi) \right\rangle \quad (3.50)$$

donde los brackets denotan valor de espectación sobre el volumen espacial 3D. La densidad lagrangiana 4D es dada por

$${}^{(4)}\mathcal{L}(\varphi; \varphi_{,\mu}) = -\sqrt{\left|\frac{{}^{(4)}g}{{}^{(4)}g_0}\right|} \left[ \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + V(\varphi) \right]. \quad (3.51)$$

Podemos identificar el potencial efectivo para la métrica de FRW 4D [59] con

$$V(\varphi) = \left( -\frac{1}{2}g^{\psi\psi}\varphi_{,\psi}\varphi_{,\psi} \right)_{\psi=\psi_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \right)_{\psi=\psi_0}^2. \quad (3.52)$$

En este caso toma la forma

$$V(\varphi) = \frac{2}{\psi_0^2}\varphi_{(t,\vec{R},\psi_0)}^2. \quad (3.53)$$

Notar que este potencial tiene un origen geométrico y adquiere diferentes representaciones en diferentes sistemas de referencia. En nuestro caso, los observadores se encuentran en un sistema de referencia con  $U^\psi = 0$  debido a que estamos en una foliación  $\psi = \psi_0$  sobre la métrica 5D (3.23). La ecuación de movimiento 4D para  $\varphi$  es

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{3}{\psi_0}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - e^{\frac{-2t}{\psi_0}}\nabla_R^2\varphi - \left[ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} + \frac{4}{\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \right]_{\psi=\psi_0} = 0. \quad (3.54)$$

Esto significa que la derivada efectiva del potencial 4D  $V(\varphi)$  es

$$V'(\varphi)_{\psi=\psi_0} = \frac{2}{\psi_0^2} \varphi_{(t, \vec{R}, \psi_0)}. \quad (3.55)$$

$V'(\varphi)$  es efectiva en el sentido de que sólo es una identificación del último término en la ecuación (3.54) y no una derivada formal respecto de  $\varphi$ .

Ahora podemos implementar la transformación

$$\varphi_{(t, \vec{R})} = e^{-\frac{3t}{2\psi_0}} \phi_{(t, \vec{R})}, \quad (3.56)$$

donde el campo redefinido puede expandirse en la forma

$$\phi_{(t, \vec{R})} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_R \int dk_\psi \left[ b_{k_R k_\psi} e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{R}} \tilde{\eta}_{k_R}(t) + C.C. \right] \delta_{(k_\psi - k_{\psi_0})}. \quad (3.57)$$

Así la ecuación de movimiento para  $\phi$  es de tipo Klein-Gordon en un fondo de FRW

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \left[ e^{-\frac{2t}{\psi_0}} \nabla_R^2 + \frac{1}{4\psi_0^2} \right] \phi = 0. \quad (3.58)$$

La ecuación de movimiento de los modos  $\tilde{\eta}_{k_R}(t)$  es

$$\frac{d^2 \tilde{\eta}_{k_R}}{dt^2} + \left[ k_R^2 e^{-\frac{2t}{\psi_0}} - \frac{1}{4\psi_0^2} \right] \tilde{\eta}_{k_R} = 0. \quad (3.59)$$

Es importante destacar que la ecuación anterior es exactamente la ecuación (3.36) con  $\beta = \frac{1}{4}$ , con la transformación de variables (3.45), sobre la hipersuperficie  $\psi = \psi_0$ .

## Chapter 4

# Fluctuaciones cosmológicas en TMI

En este capítulo nos proponemos estudiar una expansión de *de Sitter* del universo 4-dimensional desde una teoría de Kaluza-Klein no compacta de la gravedad (4+1)-dimensional. Para ello consideraremos en forma consistente a las fluctuaciones escalares de la métrica, invariantes de gauge, con las fluctuaciones del campo inflatón, responsable de la expansión del universo.

Este trabajo ya fue realizado, aunque en forma parcial, en un artículo reciente [56].

### 4.1 Acciones, métricas y ecuaciones de movimiento en un vacío 5D

#### 4.1.1 Acción

En el contexto de una teoría de Kaluza-Klein no compacta proponemos como punto de partida a la acción respecto de la cual aplicaremos el principio variacional de campos para obtener las ecuaciones de movimiento sobre una variedad pentadimensional  $\mathcal{M}$  en un vacío aparente,

$$I = - \int_{\mathcal{M}} d^4x d\psi \sqrt{\left(\frac{|^{(5)}g|}{|^{(5)}g_0|}\right)} \left[ \frac{{}^{(5)}R}{16\pi G} + {}^{(5)}L(\varphi; \varphi, A) \right]. \quad (4.1)$$

Aquí  $G = M_p^{-2}$  es la constante gravitacional,  $M_p = 1.2 \times 10^{19} GeV$  es la masa

de Planck y  ${}^{(5)}R$  es el escalar de curvatura 5D de Ricci. Por otro lado  $|{}^{(5)}g|$  es el valor absoluto del determinante del tensor métrico 5-dimensional  $g_{AB}$  que define el producto interno para cada punto de la variedad  $\mathcal{M}$ . Además  $|{}^{(5)}g_0|$  es una constante de dimensionalización, determinada al evaluar  $|{}^{(5)}g|$  al momento en que finaliza inflación.

La acción puede separarse en dos partes:  $I = I_{grav} + I_{materia}$ , donde

$$I_{grav} = - \int_{\mathcal{M}} d^4x d\psi \sqrt{\left(\frac{|{}^{(5)}g|}{|{}^{(5)}g_0|}\right)} \left[ \frac{{}^{(5)}R}{16\pi G} \right], \quad (4.2)$$

$$I_{materia} = - \int_{\mathcal{M}} d^4x d\psi \sqrt{\left(\frac{|{}^{(5)}g|}{|{}^{(5)}g_0|}\right)} {}^{(5)}L(\varphi; \varphi_{,A}). \quad (4.3)$$

Las ecuaciones de Einstein para el campo gravitatorio surgen de aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a las variaciones de la acción total respecto del tensor métrico  $g_{AB}$ . El tensor de Einstein  $G_{AB} \equiv R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB}$ , con la curvatura del espacio-tiempo, proviene de  $I_{grav}$ . El tensor de energía-impulso  $T_{AB}$ , con la energía, momento y presiones de todas las formas de materia (excepto el campo gravitatorio), proviene de  $I_{materia}$ .

Para describir materia neutra en nuestra variedad 5-dimensional en vacío aparente, la lagrangiana debe contener un campo escalar real libre 5D

$${}^{(5)}L = \frac{1}{2}g^{AB}\varphi_{,A}\varphi_{,B}, \quad (4.4)$$

en la cual no aparece ningún término de potencial 5-dimensional  $V(\varphi)$ .

### 4.1.2 Métrica

El objetivo de la Teoría de Materia Inducida es trabajar sobre un espacio (4+1)-dimensional en vacío aparente. Para ello el espacio debe estar libre de fuentes de curvatura, o sea: debe ser plano (al menos localmente). Formalmente significa que todos los componentes del tensor de Einstein 5D deben ser nulos  $G_{AB} = 0$ . Esto a su vez implica que el tensor de curvatura de Ricci es nulo  $R_{AB} = 0$ . Para cumplir esta condición proponemos una métrica de fondo y una perturbación. En términos del tensor métrico queda

$$g_{AB} = \bar{g}_{AB} + \delta g_{AB}, \quad (4.5)$$

y con esto el intervalo invariante 5D puede escribirse como

$$dS^2 = \bar{g}_{AB}dx^A dx^B + \delta g_{AB}dx^A dx^B, \quad (4.6)$$

donde  $\bar{g}_{AB}$  es la métrica de fondo idealizada, mientras que  $\delta g_{AB}$  es una pequeña perturbación.

Pedimos luego que la métrica de fondo cumpla con la condición de vacío. En este sentido proponemos la métrica de fondo trabajada con anterioridad [57]

$$\bar{g}_{AB} = \begin{bmatrix} \psi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2N}\psi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{2N}\psi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2N}\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Su intervalo invariante es

$$(dS^2)_b = \bar{g}_{AB}dx^A dx^B = \psi^2 dN^2 - \psi^2 e^{2N} \vec{dr}^2 - d\psi^2, \quad (4.8)$$

donde  $\vec{dr}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ . Las coordenadas  $(N, \vec{r})$  son adimensionales, la quinta coordenada  $\psi$  tiene unidades de longitud. Esta métrica describe un universo ideal: 3D espacialmente isotrópico, homogéneo y plano [60]. Además, la métrica de fondo es globalmente plana, es decir, satisface  $\bar{R}_{BCD}^A = 0$ , por lo que trivialmente  $\bar{G}_{AB} = 0$ , y luego describe un universo 5D vacío.

Introduzcamos ahora la perturbación de la métrica  $\delta g_{AB}$ . Como ya se vio en [2.2.2], esencialmente, se separan en tres tipos: escalares, vectoriales y tensoriales de segundo orden. Pero en una teoría lineal no hay acoplamiento entre modos de diferente orden tensorial, esto significa que evolucionan independientemente los unos de los otros. Las ondas gravitacionales (fluctuaciones tensoriales) no se acoplan a orden lineal a las fluctuaciones de materia. Las fluctuaciones vectoriales son diluídas con la expansión del universo, por lo que usualmente no son importantes en el análisis cosmológico. Las fluctuaciones más importantes, al menos en cosmología inflacionaria, son las fluctuaciones escalares de la métrica. Estas fluctuaciones se acoplan



a las inhomogeneidades de materia, y son la generalización relativista de las perturbaciones Newtonianas ya vistas. En este sentido fijemos el gauge longitudinal o Newtoniano (2.51) de perturbaciones escalares sobre la métrica de fondo; el elemento de línea de universo 5D perturbado queda

$$dS^2 = \psi^2 (1 + 2\Phi) dN^2 - \psi^2 e^{2N} (1 - 2\Psi) dr^2 - (1 - Q) d\psi^2, \quad (4.9)$$

donde los campos invariantes de gauge  $\Phi$ ,  $\Psi$  y  $Q$  son funciones de las coordenadas  $(N, \vec{r}, \psi)$  y representan las perturbaciones de la métrica en el gauge longitudinal.

Por otro lado el tensor de energía-momento para el campo inflatón deducido del lagrangiano de materia es simétrico ( $T_{AB} = T_{BA}$ ) es

$$T_{AB} = \varphi_{,A}\varphi_{,B} - \frac{1}{2}g_{AB}\varphi_{,C}\varphi^{,C}. \quad (4.10)$$

En este caso obtenemos que  $\Phi = \Psi$  y  $Q = 2\Phi$ . De esta manera, sólo queda una variable libre de la perturbación de la métrica, que no es otra cosa que una generalización del potencial Newtoniano  $\Phi$  para campos débiles y velocidades bajas [6], con esto escribimos

$$dS^2 = \psi^2 (1 + 2\Phi) dN^2 - \psi^2 e^{2N} (1 - 2\Phi) dr^2 - (1 - 2\Phi) d\psi^2. \quad (4.11)$$

De aquí podemos calcular el tensor métrico contravariante a primer orden en  $\Phi$

$$g^{AB} = \begin{bmatrix} \frac{(1-2\Phi)}{\psi^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(1+2\Phi)e^{2N}}{\psi^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(1+2\Phi)e^{2N}}{\psi^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-(1+2\Phi)e^{2N}}{\psi^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(1-2\Phi) \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

el cual puede escribirse de la forma perturbativa  $g^{AB} = \bar{g}^{AB} + \delta g^{AB}$ . Es importante aclarar que la identidad  $g_{AK}g^{KB} = \delta_A^B$  sólo se cumple para la métrica de fondo, es decir  $\bar{g}_{AK}\bar{g}^{KB} = \delta_A^B$  mientras que  $\delta g_{AK}\delta g^{KB} \neq \delta_A^B$

### 4.1.3 Ecuaciones de movimiento para $\varphi$ y $\Phi$

A continuación calcularemos a partir de las ecuaciones de Euler- Lagrange que salen de minimizar la acción total, las ecuaciones que me determinan la dinámica del campo inflatón y de las fluctuaciones escalares de la métrica. Estas ecuaciones son,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial x^A} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial x^A}} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial x^A} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi}{\partial x^A}}, \quad (4.13)$$

donde  $\mathcal{L}$  es la densidad lagrangiana total:  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{grav} + \mathcal{L}_{materia}$ , que se integra sobre  $\mathcal{M}$

$$I = - \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}(\varphi; \varphi, A) d^4 x d\psi. \quad (4.14)$$

Explícitamente

$$\mathcal{L}_{materia}(\varphi; \varphi, A) = \sqrt{\left(\frac{|^{(5)}\bar{g}|}{|^{(5)}\bar{g}_0|}\right)^{(5)}L(\varphi; \varphi, A)}, \quad (4.15)$$

$$\mathcal{L}_{grav} = \sqrt{\left(\frac{|^{(5)}\bar{g}|}{|^{(5)}\bar{g}_0|}\right)^{(5)}\frac{R}{16\pi G}}, \quad (4.16)$$

donde  $|^{(5)}\bar{g}| = \psi^8 e^{6N}$  es el valor absoluto del determinante para la métrica de fondo [4.8]y  $|^{(5)}\bar{g}_0| = \psi_0^8 e^{6N_0}$  es lo anterior evaluado cuando finaliza inflación, es decir cuando  $\dot{b} = 0$ , donde  $b(t)$  es el parámetro de escala. Aquí consideraremos que  $N_0 = 0$ , por lo que  $|^{(5)}\bar{g}_0| = \psi_0^8$ .

Llegado este punto cabe una aclaración. En principio, el hecho de introducir un campo escalar libre en la teoría nos llevaría a tener un tensor de energía-momento pentadimensional  $T_{AB} = \varphi_{,A}\varphi_{,B} - \frac{1}{2}g_{AB}\varphi_{,C}\varphi^{,C} \neq 0$ . Sin embargo, podemos definir un campo escalar de fondo  $\varphi_b(N, \psi)$  constante sobre la métrica de fondo (4.8) (esto lo haremos introduciendo una expansión semiclásica  $\varphi(N, \vec{r}, \psi) = \varphi_b(N, \psi)\delta\varphi(N, \vec{r}, \psi)$ ), tal que el tensor de energía-momento evaluado en la métrica de fondo sea nulo. Es decir  $\bar{T}_{AB} = \varphi_{b,A}\varphi_{b,B} - \frac{1}{2}\bar{g}_{AB}\varphi_{b,C}\varphi_b^{,C} = 0$ . Esto esta de acuerdo con la condición de vacío para la métrica de fondo ( $\bar{R}_{ABC}^D = 0$ ). La dinámica 4D a partir del campo inflatón 5D  $\varphi$ , es obtenida al considerar el movimiento de los observadores en 5D, de tal manera que ellos obtendrán una dinámica efectiva 4D,

con un campo escalar efectivo de fondo 4D no constante.

La ecuación de Lagrange para  $\varphi$  es

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial N} - e^{-2N} \nabla_r^2 \varphi - \psi \left[ \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right] - 2 \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial N} \frac{\partial \Phi}{\partial N} + \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right] - \\ - 2\Phi \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial N} - e^{-2N} \nabla_r^2 \varphi + \psi \left( \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

mientras que la ecuación de Lagrange para  $\Phi$  es

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right)^2 + e^{-2N} (\nabla \varphi)^2 + \psi^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right)^2 = \frac{\partial \mathcal{L}_{grav}}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial x^A} \frac{\partial \mathcal{L}_{grav}}{\partial \Phi_{,A}}. \quad (4.18)$$

Haciendo la aproximación semiclásica sobre el campo inflatón  $\varphi_{(N,\vec{r},\psi)} = \varphi_b(N,\psi) + \delta\varphi_{(N,\vec{r},\psi)}$  tal que  $\varphi_b$  es la solución de la ecuación (4.17) cuando  $\Phi = \delta\phi = 0$ , se obtiene

$$\frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \varphi_b}{\partial N} - \psi \left[ \psi \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial \psi^2} + 4 \frac{\partial \varphi_b}{\partial \psi} \right] = 0. \quad (4.19)$$

Tomando la ecuación dinámica (4.17) a primer orden en perturbaciones  $\delta\varphi, \Phi$  nos queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \delta\varphi}{\partial N} - e^{-2N} \nabla_r^2 \delta\varphi - \psi \left[ \psi \frac{\partial^2 \delta\varphi}{\partial \psi^2} + 4 \frac{\partial \delta\varphi}{\partial \psi} \right] - \\ - 2 \left[ \frac{\partial \varphi_b}{\partial N} \frac{\partial \Phi}{\partial N} \right] - 2\psi^2 \left[ \frac{\partial \varphi_b}{\partial \psi} \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} + \Phi \left( \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial \psi^2} + \frac{4}{\psi} \frac{\partial \varphi_b}{\partial \psi} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Por otro lado, si apagamos las perturbaciones estamos evaluando las cantidades sobre la métrica de fondo, en ese caso el escalar de curvatura de Ricci 5D es nulo  ${}^{(5)}\bar{R} = 0$  y luego  $(\mathcal{L}_{grav})_b = 0$ . Así, la ecuación (4.18) resulta para el campo de fondo  $\varphi_b$ , una densidad de energía cero en 5D

$${}^{(5)}\rho_b \propto \left( \frac{\partial \varphi_b}{\partial N} \right)^2 + \psi^2 \left( \frac{\partial \varphi_b}{\partial \psi} \right)^2 = 0. \quad (4.21)$$

Esta ecuación resultará útil a la hora de resolver las ecuaciones diferenciales

#### 4.1.4 Ecuaciones de Einstein en 5D

Minimizando la acción  $I = I_{grav} + I_{materia}$  respecto al tensor métrico  $g_{AB}$  obtenemos las ecuaciones de Einstein en 5D

$$G_{AB} \equiv R_{AB} - \frac{1}{2}R g_{AB} = -8\pi GT_{AB}. \quad (4.22)$$

Como trabajamos con cantidades perturbadas respecto a una métrica de fondo que describe un vacío aparente en 5D, también perturbamos las ecuaciones de Einstein. Podemos pensar la expansión orden a orden como,

$$G_{AB} = G_{AB}^{(0)} + \epsilon G_{AB}^{(1)} + \epsilon^2 G_{AB}^{(2)} + \dots \quad (4.23)$$

Lo mismo le pasará al tensor de energía-momento al otro lado de la ecuación (4.22)

$$T_{AB} = T_{AB}^{(0)} + \epsilon T_{AB}^{(1)} + \epsilon^2 T_{AB}^{(2)} + \dots \quad (4.24)$$

Por lo que podemos identificar los términos de igual orden

$$G_{AB}^{(0)} = -8\pi GT_{AB}^{(0)} \quad , \quad G_{AB}^{(1)} = -8\pi GT_{AB}^{(1)} \quad , \quad G_{AB}^{(2)} = -8\pi GT_{AB}^{(2)} \quad , \dots \quad (4.25)$$

En esta tesis trabajamos a orden lineal en el parámetro  $\epsilon$ . En este sentido hacemos las correspondencias

$$G_{AB}^{(0)} \equiv \bar{G}_{AB} \quad , \quad G_{AB}^{(1)} \equiv \delta G_{AB} \quad (4.26)$$

$$T_{AB}^{(0)} \equiv \bar{T}_{AB} \quad , \quad T_{AB}^{(1)} \equiv \delta T_{AB}. \quad (4.27)$$

Como ya vimos, sobre la métrica de fondo  $\bar{G}_{AB} = \bar{T}_{AB} = 0$ . Así que sólo nos queda la ecuación de Einstein con perturbaciones a primer orden. De sus elementos diagonales  $\delta G_{(AA)} = -8\pi G \delta T_{(AA)}$ , obtenemos las ecuaciones

$$9 \frac{\partial \Phi}{\partial N} - 9\psi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} - 3\psi^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} - 3e^{-2N} \nabla_r^2 \Phi + 12\Phi = -16\pi G \psi^2 \Phi \left( \frac{\partial \varphi_b}{\partial \psi} \right)^2, \quad (4.28)$$

$$3\psi^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} - 36\Phi + 2e^{-2N} \nabla_r^2 \Phi - 30 \frac{\partial \Phi}{\partial N} - 9 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial N^2} + 3\psi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = 48\pi G \Phi \left( \frac{\partial \varphi_b}{\partial N} \right)^2, \quad (4.29)$$

$$3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial N^2} - e^{-2N} \nabla_r^2 \Phi + 24\Phi + 15 \frac{\partial \Phi}{\partial N} - 6\psi \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = -16\pi G \Phi \left( \frac{\partial \varphi_b}{\partial N} \right)^2. \quad (4.30)$$

Éstas pueden combinarse en una sola

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial N} - e^{-2N} \nabla_r^2 \Phi - 2\psi^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} + \frac{16\pi G}{3} \Phi \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial \varphi_b}{\partial N} \right)^2 + \psi^2 \left( \frac{\partial \varphi_b}{\partial \psi} \right)^2 \right]}_{2^{(5)}\rho_b} = 0, \quad (4.31)$$

y como  ${}^{(5)}\rho_b = 0$  obtenemos la evolución independiente del campo  $\Phi$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \Phi}{\partial N} - e^{-2N} \nabla_r^2 \Phi - 2\psi^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} = 0. \quad (4.32)$$

## 4.2 Cuantificación y normalización de las fluctuaciones cosmológicas en un vacío 5D

### 4.2.1 Normalización de $\Phi$ en 5D

Primero consideremos la separación de variables para las fluctuaciones escalares de la métrica en 5D  $\Phi_{(N,\vec{r},\psi)} = \Phi_{1(N)} \Phi_{2(\vec{r})} \Phi_{3(\psi)}$ . Con esto obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \psi^2 \frac{d^2 \Phi_3}{d\psi^2} &= k_\psi^2 \psi^2 \Phi_3, \\ \nabla_r^2 \Phi_2 &= -k_r^2 \Phi_2, \\ \frac{d^2 \Phi_1}{dN^2} + 3 \frac{d\Phi_1}{dN} &= (2k_\psi^2 \psi^2 - e^{-2N} k_r^2) \Phi_1, \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde se vió en [62] que  $k_\psi^2 \psi^2$  es una constante adimensional positiva. Haciendo un mapeo  $\Phi_{(N,\vec{r},\psi)} = e^{-3N/2} \left( \frac{\psi}{\psi_0} \right) \chi_{(N,\vec{r})}$  obtenemos un campo  $\chi$  que cumple con una ecuación de Klein-Gordon para el universo en expansión

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial N^2} - \left( e^{-2N} \nabla_r^2 + 2k_\psi^2 \psi^2 + \frac{9}{4} \right) \chi = 0. \quad (4.34)$$

Hasta aquí estábamos manipulando campos "clásicos". Nuestro siguiente paso será cuantificar canónicamente al campo escalar redefinido  $\chi$ , usando el procedimiento estándar de Teoría Cuántica de Campos, esto es, estableciendo una relación de conmutación entre el campo y su momento canónico conjugado. Para ello, primero hagamos una expansión en el espacio de Fourier del campo  $\chi$ ,

$$\chi_{(N, \vec{r})} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_r \int dk_\psi \left[ a_{k_r k_\psi} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \xi_{k_r k_\psi}(N) + a_{k_r k_\psi}^\dagger e^{-i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \xi_{k_r k_\psi}^*(N) \right]. \quad (4.35)$$

Para cumplir la relación de conmutación estándar

$$\left[ \chi_{(N, \vec{r})}, \frac{\partial \chi}{\partial N}(N, \vec{r}') \right] = i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (4.36)$$

los coeficientes  $a_{k_r k_\psi}$  y  $a_{k_r k_\psi}^\dagger$  deben ser operadores de creación y destrucción convencionales, que cumplen las relaciones de conmutación para bosones

$$\left[ a_{k_r k_\psi}, a_{k'_r k'_\psi}^\dagger \right] = \delta^{(3)}(\vec{k}_r - \vec{k}'_r), \quad \left[ a_{k_r k_\psi}, a_{k'_r k'_\psi} \right] = \left[ a_{k_r k_\psi}^\dagger, a_{k'_r k'_\psi}^\dagger \right] = 0. \quad (4.37)$$

Sustituyendo la expansión de Fourier (4.35) en el conmutador (4.36) y teniendo en cuenta las relaciones de conmutación de los operadores de creación y destrucción (4.37), se obtiene la **condición de renormalización para los modos**  $\xi_{k_r k_\psi}(N)$

$$\xi_{k_r k_\psi}(N) \xi_{k_r k_\psi}^{*'}(N) - \xi_{k_r k_\psi}^*(N) \xi_{k_r k_\psi}'(N) = i, \quad (4.38)$$

donde  $(') \equiv \frac{\partial}{\partial N}$ .

Por otro lado si insertamos la expansión de Fourier en la ecuación de evolución de  $\chi$  (4.34), se obtiene una ecuación de movimiento de los modos

$$\frac{d^2 \xi_{k_r k_\psi}}{dN^2} + \left[ e^{-2N} k_r^2 - \left( 2k_\psi^2 \psi^2 + \frac{9}{4} \right) \right] \xi_{k_r k_\psi} = 0, \quad (4.39)$$

cuya solución general se escribe en términos de las funciones de Hankel  $\mathcal{H}_\nu^{(1,2)}[x] = \mathcal{J}_\nu[x] \pm \mathcal{Y}_\nu[x]$ , siendo  $\mathcal{J}_\nu[x]$  y  $\mathcal{Y}_\nu[x]$  las funciones de Bessel de primera y segunda especie

$$\xi_{k_r k_\psi}(N) = C_1 \mathcal{H}_\nu^{(1)}[x_{(N)}] + C_2 \mathcal{H}_\nu^{(2)}[x_{(N)}]. \quad (4.40)$$

Aquí  $\nu = \frac{\sqrt{9+8(k_\psi\psi)^2}}{2}$  es una constante y  $x_{(N)} = k_r e^{-N}$ . Estableciendo el vacío de Bunch-Davies [26] definimos  $C_1 = 0$  de tal forma que, sólo después de renormalizar la solución con (4.38), se obtiene

$$\xi_{k_r k_\psi}(N) = i \sqrt{\frac{\pi}{4}} \mathcal{H}_\nu^{(2)}[x_{(N)}]. \quad (4.41)$$

puede resultar ilustrativo ver la solución de  $\Phi$  a partir de su mapeo y desarrollo de Fourier en los modos ya normalizados del campo redefinido  $\chi$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_{(N, \vec{r}, \psi)} &= i \sqrt{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{e^{-N}}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{\psi}{\psi_0} \right) \times \\ &\times \int d^3 k_r \int dk_\psi \left[ a_{k_r k_\psi} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \mathcal{H}_\nu^{(2)}[x_{(N)}] - a_{k_r k_\psi}^\dagger e^{-i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \mathcal{H}_\nu^{(1)}[x_{(N)}] \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

#### 4.2.2 Separación de variables del campo de fondo $\varphi_b$ y ecuación inhomogénea para $\delta\varphi$

Hasta ahora pudimos resolver la dinámica de las fluctuaciones de la métrica  $\Phi$  en términos de una expansión de Fourier para sus modos cuánticos  $\xi_{k_r k_\psi}(N)$ . Ahora nos ocuparemos de la dinámica de las fluctuaciones del inflatón  $\delta\varphi$ . Para ello habrá que resolver la ecuación (4.20). Pero antes trabajemos el campo inflatón de fondo  $\varphi_b$  a partir de su ecuación de lagrange (4.19).

Proponemos la siguiente separación de variables para el campo inflatón de fondo  $\varphi_b(N, \psi) = \varphi_1(N)\varphi_2(\psi)$ , y a partir de (4.19) obtenemos

$$\frac{1}{\varphi_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial N^2} + \frac{3}{\varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial N} = 4\psi \frac{1}{\varphi_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \psi} + \psi^2 \frac{1}{\varphi_2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \psi^2} = C \quad (4.43)$$

donde  $C$  es una constante de integración. De aquí obtenemos las soluciones generales

$$\varphi_1(N) = e^{-3N/2} \left[ A_1 e^{\frac{\sqrt{9+4CN}}{2}} + A_2 e^{-\frac{\sqrt{9+4CN}}{2}} \right], \quad (4.44)$$

$$\varphi_2(\psi) = \left( \frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-3/2} \left[ B_1 \left( \frac{\psi}{\psi_0} \right)^{\frac{\sqrt{9+4C}}{2}} + B_2 \left( \frac{\psi}{\psi_0} \right)^{-\frac{\sqrt{9+4C}}{2}} \right]. \quad (4.45)$$

Si escribimos, utilizando (4.43)

$$4\psi \frac{\partial \varphi_b}{\partial \psi} + \psi^2 \frac{\partial^2 \varphi_b}{\partial \psi^2} = C \varphi_b \quad (4.46)$$

se obtiene, a partir de (4.20), la ecuación de movimiento inhomogénea para el campo inflatón

$$\frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \delta \varphi}{\partial N} - e^{-2N} \nabla_r^2 \delta \varphi - \psi \left[ \psi \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial \psi^2} + 4 \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \psi} \right] = \mathcal{O}_b \Phi, \quad (4.47)$$

donde  $\mathcal{O}_b \equiv 2 \left[ C \varphi_b + \frac{\partial \varphi_b}{\partial N} \frac{\partial}{\partial N} + \psi^2 \frac{\partial \varphi_b}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \right]$  es un operador diferencial que acopla de tres formas al campo inflatón de fondo con la fluctuación de la métrica.

### 4.2.3 Normalización de $\delta \varphi$ en 5D

Como  ${}^{(5)}\rho_b = 0$  llegamos a la conclusión que  $\varphi_b(N, \psi) = \varphi_0$  es una constante ( $\varphi$  es un campo escalar real) y esto significa que  $C = 0$ . Siendo este el caso más sencillo de expansión de Sitter en 4D. Esto es lo que estudiaremos con profundidad en este trabajo. En este caso más sencillo, quedan desacoplados el campo inflatón y las fluctuaciones de la métrica debido a que  $\mathcal{O}_b$  es nulo, luego

$$\frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial N^2} + 3 \frac{\partial \delta \varphi}{\partial N} - e^{-2N} \nabla_r^2 \delta \varphi - \psi \left[ \psi \frac{\partial^2 \delta \varphi}{\partial \psi^2} + 4 \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \psi} \right] = 0. \quad (4.48)$$

Aquí realizamos un mapeo  $\delta \varphi_{(N, \vec{r}, \psi)} = \left( \frac{\psi_0}{\psi} \right)^2 e^{3N/2} \phi_{(N, \vec{r})}$  como en [61] y llegamos a una ecuación de Klein-Gordon generalizada para el campo inflatón redefinido  $\phi$



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial N^2} - \left[ e^{-2N} \nabla_r^2 + \left( k_\psi^2 \psi^2 + \frac{1}{4} \right) \right] \phi = 0. \quad (4.49)$$

Para cuantificarlo procedemos en forma análoga a  $\chi$ , establecemos una relación de conmutación entre el campo  $\delta\varphi$  y su momento canónico conjugado [62]  $\Pi^N = \frac{\partial L}{\partial \delta\varphi_{,N}} = \bar{g}^{NN} \delta\varphi_{,N}$

$$\left[ \delta\varphi_{(N,\vec{r},\psi)}, \Pi_{(N,\vec{r}',\psi')}^N \right] = i \bar{g}^{NN} \left| \frac{{}^{(5)}\bar{g}_0}{{}^{(5)}\bar{g}} \right|^{NN} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\psi - \psi'). \quad (4.50)$$

La expansión del campo en sus modos de Fourier en 5D es

$$\phi_{(N,\vec{r})} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_r \int dk_\psi \left[ b_{k_r k_\psi} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \eta_{k_r k_\psi}(N) + b_{k_r k_\psi}^\dagger e^{-i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \eta_{k_r k_\psi}^*(N) \right]. \quad (4.51)$$

La cuantificación del campo  $\phi$  debe obedecer la relación de conmutación

$$\left[ \phi_{(N,\vec{r},\psi)}, \frac{\partial \phi}{\partial N}(N, \vec{r}', \psi') \right] = i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \delta(\psi - \psi'). \quad (4.52)$$

Para ello  $b_{k_r k_\psi}$  y  $b_{k_r k_\psi}^\dagger$  deben ser operadores de creación y destrucción convencionales de los autoestados del espacio 5D de impulsos del campo  $\phi$ . Las relaciones de conmutación que cumplen son

$$\left[ b_{k_r k_\psi}, b_{k'_r k'_\psi}^\dagger \right] = \delta^{(3)}(\vec{k}_r - \vec{k}'_r) \delta(k_\psi - k'_\psi), \quad \left[ b_{k_r k_\psi}, b_{k'_r k'_\psi} \right] = \left[ b_{k_r k_\psi}^\dagger, b_{k'_r k'_\psi}^\dagger \right] = 0. \quad (4.53)$$

Sustituyendo la expansión de Fourier (4.51) en el conmutador (4.52) y teniendo en cuenta las relaciones de conmutación de los operadores de creación y destrucción (4.53), se obtiene la **condición de renormalización para los modos**  $\eta_{k_r k_\psi}(N)$

$$\eta_{k_r k_\psi}(N) \eta_{k_r k_\psi}'^* - \eta_{k_r k_\psi}^* \eta_{k_r k_\psi}' = i, \quad (4.54)$$

donde  $(') \equiv \frac{\partial}{\partial N}$ . La ecuación para los modos resulta ser

$$\frac{d^2 \eta_{k_r k_\psi}}{dN^2} + \left[ e^{-2N} k_r^2 - \frac{1}{4} (1 + 4k_\psi^2 \psi^2) \right] \eta_{k_r k_\psi} = 0. \quad (4.55)$$

Su solución particular estableciendo un vacío físico de Bunch-Davies puede escribirse como

$$\eta_{k_r k_\psi}(N) = i \sqrt{\frac{\pi}{4}} \mathcal{H}_\lambda^{(2)} [k_r e^{-N}], \quad (4.56)$$

donde  $\lambda = \frac{\sqrt{1+4(k_\psi \psi)^2}}{2}$ .

### 4.3 de Sitter efectivo en 4D

#### 4.3.1 Métrica efectiva

Para estudiar la dinámica del sistema en una expansión efectiva de Sitter en 4D, podemos considerar la transformación o elección de coordenadas

$$t = \psi_0 N, \quad R = \psi_0 r, \quad \psi = \psi. \quad (4.57)$$

Con esta transformación la métrica de fondo en 5D queda

$$(dS^2)_b = \left( \frac{\psi}{\psi_0} \right)^2 \left[ dt^2 - e^{2t/\psi_0} dR^2 \right] - d\psi^2. \quad (4.58)$$

Esta es la métrica de Ponce de León. Describe un espacio plano isotrópico y homogéneo en su parte 3D, extendido a una métrica de Lemaitre-Friedmann-Robertson-Walker en una expansión de Sitter. Aquí  $t$  es el tiempo cósmico y  $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ . Esta métrica es un ejemplo de métricas canónicas  $dS^2 = \psi^2 g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu - d\psi^2$ . Para obtener la dinámica efectiva en 4D podemos tomar una foliación  $\psi = \psi_0$  en la métrica de Ponce de León. Luego

$$(dS^2)_b \rightarrow (ds^2)_b = dt^2 - e^{2t/\psi_0} dR^2. \quad (4.59)$$

Esta métrica efectiva describe la expansión 4D de un universo espacialmente plano, isotrópico y homogéneo; que se expande con un parámetro de Hubble  $H = 1/\psi_0$  y un escalar de Ricci 4D de curvatura  ${}^{(4)}R = 12H^2$ . Las

ecuaciones de Einstein en 4D son  $G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$  donde  $T_{\mu\nu}$  es tensor de energía-momento covariante en 4D inducido por la geometría. La ecuación de Friedmann resulta ser la convencional

$${}^{(4)}\rho_b = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (4.60)$$

La métrica efectiva de (4.11) en la hipersuperficie  $\psi = H^{-1}$  es

$$dS^2 \rightarrow ds^2 = (1 + 2\Phi)dt^2 - (1 - 2\Phi)e^{2Ht}dR^2. \quad (4.61)$$

Esta métrica describe una expansión del universo de Sitter 4D y  $\Phi(\vec{R}, t)$  es invariante de gauge.

### 4.3.2 Dinámica de $\varphi$ y $\Phi$ en una expansión de Sitter efectiva 4D

Para estudiar la dinámica 4D de las fluctuaciones de la métrica en una expansión de Sitter de fondo, consideramos la ecuación (4.48) con las transformaciones (4.59) en la foliación  $\psi = \psi_0 = H^{-1}$ , en ese caso se obtiene

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 3H \frac{\partial \Phi}{\partial t} - e^{-2Ht} \nabla_R^2 \Phi - 2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} \right)_{\psi=H^{-1}} = 0, \quad (4.62)$$

donde  $\left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} \right)_{\psi=H^{-1}} = k_{\psi_0}^2 \Phi$ . Siguiendo los pasos anteriores en 5D, hacemos un mapeo a un campo que cumple una ecuación de Klein-Gordon  $\chi_{(t, \vec{R})} = e^{3Ht/2} \Phi_{(t, \vec{R})}$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \left( e^{-2Ht} \nabla_R^2 + 2k_{\psi_0}^2 + \frac{9}{4}H^2 \right) \chi = 0. \quad (4.63)$$

Su expansión de Fourier en la foliación es

$$\chi_{(t, \vec{R})} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 k_R \int dk_\psi \left[ a_{k_R k_\psi} e^{i\vec{k}_R \cdot \vec{R}} \xi_{k_R k_\psi}(t) + a_{k_R k_\psi}^\dagger e^{-i\vec{k}_R \cdot \vec{R}} \xi_{k_R k_\psi}^*(t) \right] \delta(k_\psi - k_{\psi_0}), \quad (4.64)$$

con las relaciones de conmutación para los operadores  $a_{k_R k_\psi}$  y  $a_{k'_R k_{\psi_0}}^\dagger$

$$\left[ a_{k_R k_{\psi_0}}, a_{k'_R k_{\psi_0}}^\dagger \right] = \delta^{(3)}(\vec{k}_R - \vec{k}'_R), \quad \left[ a_{k_R k_{\psi_0}}, a_{k'_R k_{\psi_0}} \right] = \left[ a_{k_R k_{\psi_0}}^\dagger, a_{k'_R k_{\psi_0}}^\dagger \right] = 0. \quad (4.65)$$

La ecuación de movimiento para los modos  $\xi_{k_R k_{\psi_0}}(t)$  dependientes del tiempo, resulta ser

$$\frac{d^2 \xi_{k_R k_{\psi_0}}(t)}{dt^2} + \left[ e^{-2Ht} k_R^2 - \left( 2k_{\psi_0}^2 + \frac{9}{4} H^2 \right) \right] \xi_{k_R k_{\psi_0}}(t) = 0. \quad (4.66)$$

Su solución particular, estableciendo un vacío de Bunch-Davies (B-D), es

$$\xi_{k_R k_{\psi_0}}(t) = i \sqrt{\frac{\pi}{4H^3}} \mathcal{H}_\nu^{(2)}[y(t)], \quad (4.67)$$

donde  $\nu = \frac{\sqrt{9+8(k_{\psi_0}/H)^2}}{2}$  y  $y(t) = k_R \frac{e^{-Ht}}{H}$ .

Para el campo  $\delta\varphi_{(t, \vec{R})}$  en la foliación, utilizamos el mismo procedimiento que en 5D. Primero lo transformamos a un campo  $\phi$  que cumple una ecuación de Klein-Gordon para un fondo de Sitter. Después realizamos una expansión de Fourier en modos dependientes del tiempo  $\eta_{k_R k_{\psi_0}}(t)$ . Luego lo cuantificamos, exigiendo que cumpla una relación de conmutación con su momento canónico conjugado. Para ello, los coeficientes de la expansión de Fourier deben ser operadores de creación y destrucción que cumplan las relaciones de conmutación estándares para bosones. Paralelamente, los modos también deben cumplir con la condición de renormalización. Reemplazando la expansión de Fourier en la ecuación de movimiento del campo redefinido obtenemos la ecuación dinámica para los modos

$$\frac{d^2 \eta_{k_R k_{\psi_0}}(t)}{dt^2} + \left[ e^{-2Ht} k_R^2 - \left( \frac{H^2}{4} + k_{\psi_0}^2 \right) \right] \eta_{k_R k_{\psi_0}}(t) = 0. \quad (4.68)$$

En modelos convencionales de inflación  $k_{\psi_0}^2 + \frac{H^2}{4}$  es la masa al cuadrado del campo inflatón. Este modelo se caracteriza por el hecho de que esta masa es inducida por la geometría de la quinta coordenada. Es importante notar que en un modelo mas realista la ecuación anterior para los modos del inflatón tendría un término fuente correspondiente a los modos de las fluctuaciones de la métrica.

Finalmente, utilizando la condición de renormalización, podemos definir el vacío físico de B-D y obtener una solución particular de los modos dependientes del tiempo

$$\eta_{k_R k_{\psi_0}}(t) = i \sqrt{\frac{\pi}{4H}} \mathcal{H}_\lambda^{(2)} \left[ \frac{k_R}{H} e^{-Ht} \right], \quad (4.69)$$

$$\text{con } \lambda = \frac{\sqrt{1+4k_{\psi_0}^2/H^2}}{2}.$$

### 4.3.3 Fluctuaciones en la densidad de energía y su espectro

Calculemos las desviaciones en la densidad de energía  ${}^{(4)}\delta\rho = \delta T_N^N|_{N=Ht, \psi=\psi_0=H^{-1}}$  donde  $\delta T_{NN} = -\frac{1}{2}\delta g_{NN}\varphi_{,A}\varphi^{,A}$ . Así

$$\delta\rho = g^{NN}\delta T_{NN} = \left( \frac{1-2\Phi}{\psi^2} \right) 2\Phi\psi^2 \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} \right)^2. \quad (4.70)$$

Haciendo una expansión semiclásica para el inflatón  $\varphi = \varphi_b + \delta\varphi$ , se obtiene la expresión

$$\delta\rho = \left( \frac{1-2\Phi}{\psi^2} \right) 2\Phi\psi^2 \left[ \left( \frac{\partial\varphi_b}{\partial\psi} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial\varphi_b}{\partial\psi} \right) \left( \frac{\partial\delta\varphi}{\partial\psi} \right) + \left( \frac{\partial\delta\varphi}{\partial\psi} \right)^2 \right]. \quad (4.71)$$

En este caso el campo clásico efectivo en 4D  ${}^{(4)}\varphi_b$  no es constante respecto a las diferentes foliaciones (o inmersiones) en hojas  $\psi = cte$ . Dada la ecuación de Friedmann sobre la métrica efectiva de fondo

$$\frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial\varphi_b}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial\varphi_b}{\partial\psi} \right)^2_{\psi=H^{-1}} \propto \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (4.72)$$

el segundo término que depende de la derivada respecto de la quinta coordenada se identifica con el potencial clásico de la siguiente forma (3.52)

$$V(\varphi_b) = -\frac{1}{2}\bar{g}^{\psi\psi} \left( \frac{\partial\varphi_b}{\partial\psi} \right)^2_{\psi=\psi_0} = 2H^2\varphi_b^2|_{\psi=\psi_0} = 2H^2\varphi_0^2. \quad (4.73)$$

donde  $\varphi_0$  es el campo inflatón de fondo efectivo 4D en la foliación  $\psi = \psi_0$ . En una expansión de Sitter, este campo es una constante de  $t$  de forma que

las condiciones de rodadura lenta [63] se cumplan. Por otro lado del mapeo ya usado vemos, que  $\frac{\partial \delta \varphi}{\partial \psi} = -\frac{2}{\psi} \delta \varphi$ , con ello

$$\frac{\delta \rho}{8H^2} = \varphi_0^2 \Phi + 2\varphi_0 \Phi \delta \varphi + \Phi \delta \varphi^2 - 2\varphi_0^2 \Phi^2 - 4\varphi_0 \Phi^2 \delta \varphi - 2\Phi^2 \delta \varphi^2. \quad (4.74)$$

Tomando el valor de expectación de  $\delta \rho$  (para lo cual asumimos que se cumple la relación de conmutación  $[\Phi, \delta \varphi] = 0$ ) y después de despreciar el término cuártico, se obtiene

$$\langle \delta \rho \rangle = 16H^2 [\varphi_0 \langle \Phi \delta \varphi \rangle - \varphi_0^2 \langle \Phi^2 \rangle], \quad (4.75)$$

donde

$$\langle \Phi^2 \rangle = \frac{e^{-3Ht}}{2\pi^2} \int dk_R k_R^2 \xi_{k_R k_{\psi_0}}(t) \xi_{k_R k_{\psi_0}}^*(t), \quad (4.76)$$

$$\langle \Phi \delta \varphi \rangle = \frac{e^{-3Ht}}{2\pi^2} \int dk_R k_R^2 \xi_{k_R k_{\psi_0}}(t) \eta_{k_R k_{\psi_0}}^*(t). \quad (4.77)$$

Nos interesan las perturbaciones de escala cosmológica de longitudes de onda mucho mayores que el horizonte. Por ello nos concentramos en el sector infrarrojo del espectro, esto es,  $k_R \ll k_H = He^{Ht}$ . En este límite asintótico escribimos los modos de  $\delta \varphi$  y  $\Phi$  como

$$\text{MÉTRICA} \quad \xi_{k_R k_{\psi_0}}(t) \simeq \frac{\Gamma(\nu)}{2\sqrt{H}\pi} (2H)^\nu e^{\nu Ht} k_R^{-\nu}, \quad (4.78)$$

$$\text{INFLATÓN} \quad \eta_{k_R k_{\psi_0}}(t) \simeq \frac{\Gamma(\lambda)}{2\sqrt{H^3}\pi} (2H)^\lambda e^{\lambda Ht} k_R^{-\lambda}. \quad (4.79)$$

Sea la separación  $\langle \delta \rho \rangle = \langle \delta \rho_1 \rangle + \langle \delta \rho_2 \rangle$ , donde

$$\langle \delta \rho_1 \rangle = 16H^2 \varphi_0 \langle \Phi \delta \varphi \rangle, \quad (4.80)$$

$$\langle \delta \rho_2 \rangle = -16H^2 \varphi_0^2 \langle \Phi^2 \rangle. \quad (4.81)$$

Evaluando las integrales se obtiene

$$\langle \delta\rho_1 \rangle \simeq \varphi_0 H^3 \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\nu)2^{5-n_1}}{\pi^3} \left( \frac{\epsilon^{n_1-1}}{n_1-1} \right), \quad (4.82)$$

$$\langle \delta\rho_2 \rangle \simeq \varphi_0^2 H^2 \frac{\Gamma(\nu)^2 2^{5-n_2}}{\pi^3} \left( \frac{\epsilon^{n_2-1}}{1-n_2} \right). \quad (4.83)$$

Con los índices espectrales  $n_i$

$$n_1 = 4 - \nu - \lambda, \quad (4.84)$$

$$n_2 = 4 - 2\nu. \quad (4.85)$$

Además,  $\epsilon \equiv \frac{k_{max}^{(IR)}}{k_p} \ll 1$  es un parámetro adimensional. Tal que,  $k_{max}^{(IR)} = He^{Ht_i}$  es el número de onda relacionado al radio de Hubble en el instante  $t_i$  (tiempo en que cruza el radio de Hubble) y  $k_p$  es el número de onda de orden Planckiano, que sirve como límite superior en la escala del espectro. Es importante notar que la ecuación anterior tiene en cuenta las fluctuaciones de la métrica y del inflatón en forma acoplada. La amplitud relativa para las fluctuaciones en la densidad de energía es  $\langle \delta\rho \rangle / \rho_b$ . Para analizar el espectro en escala cosmológica, pedimos que la fluctuaciones de la métrica sean casi invariantes de escala en el límite infrarrojo.

$$\langle \Phi^2 \rangle_{IR} = \frac{e^{-3Ht}}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{max}^{(IR)}} d^3 k_R \eta_{k_R k_{\psi_0}} \eta_{k_R k_{\psi_0}}^*. \quad (4.86)$$

Las fluctuaciones cuadráticas para  $\Phi$  tienen un espectro de potencias dado por (2.29)

$$\mathcal{P}(k_R) \propto k_R^{3-\sqrt{9+8(k_{\psi_0}/H)^2}} \quad (4.87)$$

Es notable como el espectro de potencias depende de la quinta coordenada sobre las hipersuperficies  $\psi = \psi_0 = H^{-1}$ . De la evidencia experimental [65] se sabe que el índice espectral es acotado a

$$n_s = 0.951_{-0.019}^{+0.015} \quad (4.88)$$

De acuerdo a nuestro modelo  $n_2 = 4 - \sqrt{9 + 8(k_{\psi_0}/H)^2}$  es el índice espectral

de las fluctuaciones cuadráticas de la métrica. De la condición observacional obtenemos luego que para asegurar invariancia de escala de las fluctuaciones  $\Phi$  entonces

$$0.0160H \leq k_{\psi_0} \leq 0.227H. \quad (4.89)$$

Este resultado es muy importante ya que sugiere que las longitudes de onda asociadas a la quinta coordenada son de escala cosmológica super-Hubble

$$28H^{-1} \lesssim \lambda_{\psi_0} \lesssim 393H^{-1}. \quad (4.90)$$

Obtenida esta cota podemos estimar los valores del índice espectral de  $\langle \delta\rho \rangle / {}^{(4)}\rho_b$

$$1.940 \leq n_1 \leq 1.958, \quad (4.91)$$

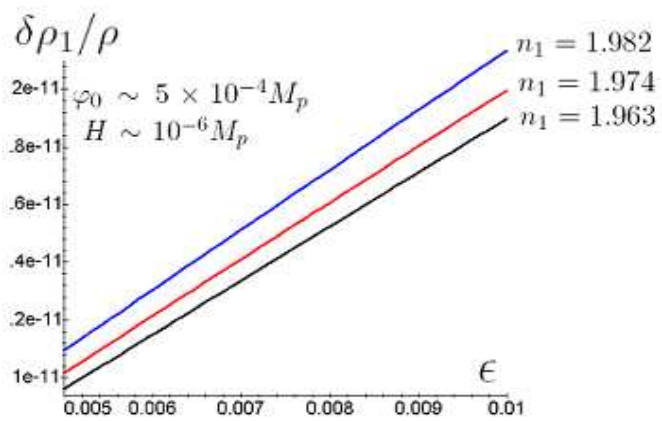
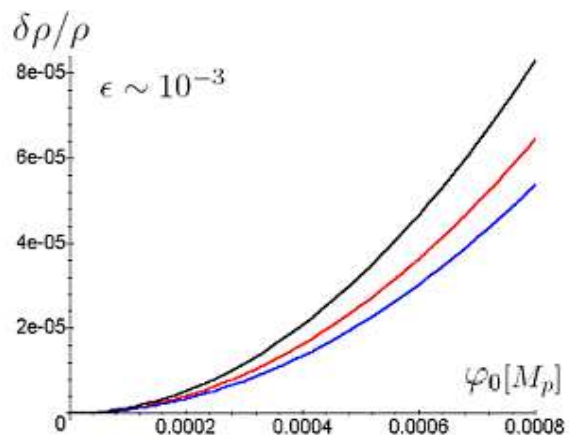
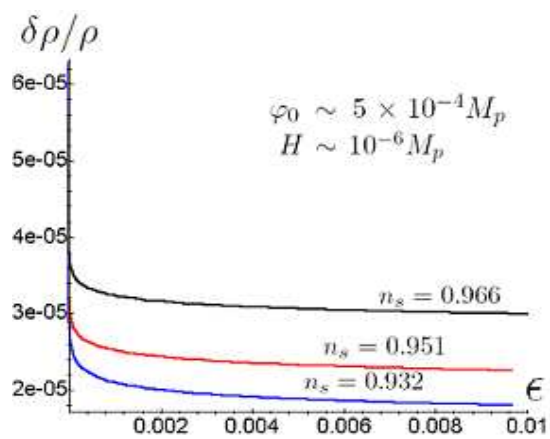
$$0.932 \leq n_2 \leq 0.966. \quad (4.92)$$

Los experimentos sobre la radiación cósmica de microondas muestra anisotropías del orden de  $10^{-5}$ . Las inhomogeneidades en la densidad de energía están directamente vinculadas a las anisotropías en la radiación cósmica de fondo de microondas. El modelo cosmológico estándar da un marco general para explicar como las pequeñas inhomogeneidades primigenias en la densidad de energía deben ser del orden de  $10^{-5}$ , para que durante la época dominada por materia sean amplificadas por la gravedad creciendo a las estructuras que vemos hoy. Estrellas ( $\delta\rho/\rho \sim 10^{30}$ ), galaxias ( $\delta\rho/\rho \sim 10^5$ ), cúmulos de galaxias ( $\delta\rho/\rho \sim 10 - 10^3$ ), supercúmulos o cúmulos de cúmulos ( $\delta\rho/\rho \sim 1$ ), vacíos ( $\delta\rho/\rho \sim -1$ ), filamentos, y continúa.

Se encuentra que, para que  $\langle \delta\rho \rangle / {}^{(4)}\rho_b$  tome valores del orden de  $10^{-5}$ , la foliación debe elegirse  $\psi_0^{-1} = H \sim 10^{-6}M_p$ , y el campo de fondo debe ser del orden  $\varphi_0 \sim 5 \times 10^{-4}M_p$ . Es muy importante que  $\varphi_0$  tome valores sub-Planckianos, ya que resuelve uno de los problemas de inflación caótica estándar en 4D, donde el campo escalar siempre tiene valores trans-Planckianos. Además, podemos estimar la duración del período inflacionario para este modelo. Si consideramos un número de desdoblamientos exponenciales  $N \gtrsim 60$ , se obtiene que inflación debe durar como mínimo  $t_f \gtrsim 6 \times 10^{-36}$  seg para resolver el problema del horizonte y planaridad.



El resultado obtenido para las inhomogeneidades depende de dos contribuciones. La primera  $\delta\rho_1$  es un acoplamiento directo entre  $\Phi$  y  $\delta\varphi$ , que no es invariante de escala. La otra  $\delta\rho_2$  depende de las fluctuaciones cuadráticas de la métrica, definidas invariantes de escala, pesadas por el campo de fondo  $\varphi_0$  al cuadrado. La contribución dominante, por varios órdenes de magnitud, es  $\delta\rho_2$ . (Ver graficos debajo). Sin embargo, el término de acoplamiento crece a medida que consideramos longitudes de onda cada vez mas cercanas al radio de Hubble (esto es, en la medida que vamos achicando la escala). Esto implicaría que en escalas astrofísicas pudiera dejar de ser residual.



# Resumen y Conclusiones

En el transcurso de esta tesis repasamos, en el primer capítulo, la teoría del Big-Bang que junto con la temprana inflación del universo constituyen el modelo de universo mas aceptado actualmente. Luego, en el segundo capítulo, estudiamos conceptos de la teoría de las fluctuaciones cosmológicas a orden lineal: desde las perturbaciones Newtonianas, pasando por las perturbaciones relativistas, hasta las fluctuaciones cuánticas. En el tercer capítulo, nos concentramos en los fundamentos de la teoría de Espacio-Tiempo-Materia o de Materia Inducida, y estudiamos una versión de inflación en este contexto, desarrollada por Bellini y Aguilar. Finalmente, en el cuarto capítulo, analizamos las fluctuaciones escalares del campo inflatón y de la métrica durante un período inflacionario de Sitter efectivo, a partir de un universo pentadimensional en vacío aparente.

El objetivo de esta tesis es completar el formalismo desarrollado en [56] para las fluctuaciones de la métrica y del campo inflatón desde un teoría de Kaluza-Klein no compacta. En dicho trabajo resolvieron la dinámica efectiva de las fluctuaciones de la métrica  $\Phi$ . Calcularon su espectro y posteriormente dedujeron un resultado para las fluctuaciones en la densidad de energía, recuperando el resultado conocido [6] para campos débiles  $\delta\rho/\rho = -2\Phi$ . Sin embargo, la dinámica del campo inflatón no había sido resuelta en este contexto. Por otro lado, un sistema de ecuaciones análogo en 4D ya existía [15, 17], donde la ecuación acoplada del campo inflatón y de las fluctuaciones de la métrica resultaba muy difícil de resolver. La situación con una teoría de dimensión extra es muy diferente. En nuestro caso la dinámica del inflatón queda desacoplada de la métrica. Paralelamente, R.H.Brandenberger realizó un trabajo similar, pero desde un modelo de B-W [64].

En este sentido, el trabajo de investigación en esta tesis fue encarado a resolver la ecuación inhomogénea (4.47). En los comienzos del trabajo este objetivo fue cumplido, obteniéndose una ecuación de movimiento para los modos del campo inflatón con un término fuente que provenía de los modos de la métrica.

$$\frac{\partial^2 \xi_{k_r k_\psi}(N)}{\partial N^2} + \left[ k_r^2 e^{-2N} - \left( k_\psi^2 \psi^2 + \frac{1}{4} \right) \right] \xi_{k_r k_\psi}(N) = \mathcal{F}_\nu(N) \quad (4.93)$$

donde  $\mathcal{F}_\nu(N)$  es una función de los modos de la métrica  $\eta_{k_r k_\psi}(N)$ .

La solución a esta ecuación es muy interesante, ya que consta de una parte homogénea y de una inhomogénea. La solución inhomogénea da cuenta de los estados anteriores de la dinámica de la métrica a través de una integración en el tiempo.

$$\xi_{k_r k_\psi}(N) = \xi_{k_r k_\psi}^{hom}(N) - \frac{\pi}{2} \int dN' \mathcal{F}_\nu(N') \left[ \mathcal{H}_\lambda^{(1)}[x(N)] \mathcal{H}_\lambda^{(2)}[x(N')] + C.C. \right] \quad (4.94)$$

con  $\xi^{hom} = a_1 \mathcal{H}_\lambda^{(1)}[x(N)] + a_2 \mathcal{H}_\lambda^{(2)}[x(N)]$ . La normalización del campo se realiza estableciendo la condición de B-D sobre la solución homogénea ( $a_1 = 0$ ). Sin embargo, en este modelo las condiciones dinámicas resultaron ser muy restrictivas por lo que se trivializó la ecuación (4.47) Específicamente  $\mathcal{O}_b = 0$ , y entonces sólo quedó la solución homogénea.

Finalmente se calcularon las desviaciones en la densidad de energía. Pero a diferencia del trabajo seminal [56], se utilizó otra expresión que está vinculada al parámetro de densidad  $\Omega$ . El valor de fondo  $\rho_b$  coincide con la densidad crítica para un universo plano. Por ello al calcular la desviación  $\langle \delta\rho \rangle / \rho_b$  estamos calculando una desviación  $\delta\Omega$  al parámetro de densidad crítico, o sea a la unidad. El término predominante resulta ser el de las fluctuaciones cuadráticas de la métrica. Su espectro se definió, a partir de la libertad en la geometría, como invariante de escala. Esto esta de acuerdo con la evidencia observacional de la radición cósmica de fondo que tiene impresas las huellas de las semillas de las estructuras cosmológicas. Estas semillas provienen del colapso gravitatorio de las fluctuaciones primordiales. El otro término, que surge del acoplamiento entre el inflatón y la métrica, es residual en escala cosmológica, pero puede llegar a ser relevante a niveles astrofísicos.

Además se encontró, al ajustar el parámetro de Hubble de origen geométrico, que el valor del potencial efectivo  $\varphi_0$  tomaba valores sub-planckianos. Este resultado permite vincular el modelo a la teoría de partículas, y resuelve el problema con inflación caótica estándar donde el campo inflatón siempre permanece con valores trans-planckianos.

Por otro lado, sería de esperar que en modelos inflacionarios mas realistas la ecuación (4.47) no sea trivial. Esta situación es esperable en una teoría en la cual el inflatón no está mínimamente acoplado a la gravedad. Esto puede lograrse al agregar un término al lagrangiano que acople la curvatura con el campo inflatón, este podría ser  $\frac{\lambda}{2}R\phi^2$ .

# Bibliography

- [1] A.Einstein, Sitz.Preuss.Akad.Wiss.Phys. 142(1917) (§4); Ann.Phys. 69 (1922)436.
- [2] A.Friedmann, Z.Phys. 10 (1922)377.
- [3] E.P.Hubble, Publ.Nat.Acad.Sci. 15(1929)168.
- [4] G.Gamow, Phys.Rev. 70 (1946)572; Phys.Rev. 74 (1948)505.
- [5] A.A.Penzias y R.W.Wilson, Astrophys.J. 142 (1965)419.
- [6] S. Weinberg, 'Gravitation and Cosmology', John Wiley & Sons (1972).
- [7] E.W.Kolb y M.S.Turner, 'The early universe', Addison Wesley(1990)
- [8] N.Arkani-Hamed, S.Dimopoulos y G.Dvali, Phys.Lett. B429 (1998) 263, e-print: hep-ph/9803315
- [9] A. A. Starobinsky, Spectrum Of Relict Gravitational Radiation And The Early State Of The Universe, JETP Lett. 30, 682 (1979) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 30, 719 (1979)]; A. A. Starobinsky, A New Type Of Isotropic Cosmological Models Without Singularity, Phys. Lett. B 91, 99 (1980).
- [10] A. H. Guth, The Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon And Flatness Problems, Phys. Rev. D 23, 347 (1981).
- [11] A. D. Linde, A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems, Phys. Lett. B 108, 389 (1982); A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Cosmology For Grand Unified Theories With Radiatively Induced Symmetry Breaking, Phys. Rev. Lett. 48, 1220 (1982).

- [12] V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov, Quantum Fluctuation And Non-singular Universe, JETP Lett. 33, 532 (1981) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 33, 549 (1981)].
- [13] S. W. Hawking, The Development Of Irregularities In A Single Bubble Inflationary Universe, Phys. Lett. B 115, 295 (1982); A. A. Starobinsky, Dynamics Of Phase Transition In The New Inflationary Universe Scenario And Generation Of Perturbations, Phys. Lett. B 117, 175 (1982); A. H. Guth and S. Y. Pi, Fluctuations In The New Inflationary Universe, Phys. Rev. Lett. 49, 1110 (1982); J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M. S. Turner, Spontaneous Creation Of Almost Scale - Free Density Perturbations In An Inflationary Universe, Phys. Rev. D 28, 679 (1983).
- [14] V. F. Mukhanov, Gravitational Instability Of The Universe Filled With A Scalar Field, JETP Lett. 41, 493 (1985) [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 41, 402 (1985)]
- [15] A.D. Linde, Particle Physics and Inflationary Cosmology (Harwood, Chur, Switzerland, 1990).
- [16] H.J.de Vega, 'Early Cosmology and Fundamental Physics', e-print: astro-ph/0307477
- [17] V.F.Mukhanov, H.A.Feldman, R.H.Brandenberger, Phys.Rept. 215, 203(1992)
- [18] R.K.Sachs, A.M.Wolfe, Astrophys.J. 147, 73(1967)
- [19] E.R.Harrison, Phys.Rev. D1, 2726(1970)
- [20] Y.B.Zeldovich, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 160, 1(1972)
- [21] E.Lifshitz, J.Phys.(USSR) 10, 116(1946)  
E.M.Lifshitz, I.M.Khalatnikov, Adv.Phys. 12, 185(1963)
- [22] J.M.Bardeen, Phys.Rev. D22, 1882(1980)
- [23] J.Stewart, Class.Quant.Grav. 7, 1169(1990)
- [24] J.Stewart, M.Walker, Proc.R.Soc.London A 341, 49 (1974)
- [25] V.F.Mukhanov, G.V.Chibisov, JETP Lett. 33, 532 (1981)
- [26] T.S.Bunch, P.C.W.Davies, Proc. R. Soc. A 360 (1978) 117

- [27] Th. Kaluza, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 33, Phys. Math. K1, 996 (1921).
- [28] O. Klein, Z. F. Physik 37, 895 (1926).  
O. Klein, Nature 118, 516 (1926).
- [29] P. Collins, A. Martin and E. Squires, Particle Physics and Cosmology, Wiley, New York, 1989
- [30] T. Appelquist, A. Chodos and P. Freund, Modern Kaluza-Klein Theories, Addison- Wesley, Menlo Park, 1989
- [31] J. A. Wheeler, Einsteins Vision, Springer, Berlin, 1968
- [32] P. S. Wesson , J. Ponce de Leon, J. Math. Phys. 33 (1992) 3883
- [33] P. S. Wesson, Space-Time-Matter, World Scientific, Singapore, 1999
- [34] J. M. Overduin, P. S. Wesson, Phys. Rep. 283 (1997) 303
- [35] J. Ponce de Leon, Gen. Rel. Grav. 20 (1988) 539
- [36] P. S. Wesson, B. Mashhoon, H. Liu, W. N. Sajko, Phys. Lett. B 456 (1999) 34
- [37] J. E. Campbell, A Course of Differential Geometry, Clarendon, (1926)  
MagaardL. Magaard, Zur Einbettung Riemannscher Raume in Einstein-raume und konform-euclidische Raume, PhD Thesis, Kiel, (1963)
- [38] C. Romero, R. Tavakol, R. Zalaletdinov, Gen. Rel. Grav. 28 (1996), 365
- [39] S. S. Seahra, P. S. Wesson, gr-qc/0302015 (2003)
- [40] P. S. Wesson, B. Mashhoon, H. Liu, Mod. Phys. Lett. A 12 (1997)2309  
B. Mashhoon, P.S. Wesson, H.Liu, Gen. Rel. Grav. 30 (1998)555  
J. Ponce de Leon, Phys. Lett. B 523 (2001) 311  
S.S.Seahra, P.S.Wesson, gen.Rel.Grav. 33, 1731 (2001)  
F.Dahia, E.M.Monte, C.Romero, Mod.Phys.Lett. A18, 1773 (2003)  
S. S. Seahra, Phys. Rev. D 65 (2002) 124004  
J.Ponce de León, Int.J.Mod.Phys. D12, 757(2003)  
J.Ponce de León, Gen.Rel.Grav. 35, 1365(2003)  
J.Ponce de León, Gen.Rel.grav. 36, 1333(2003)  
J.Ponce de León, Grav.Cosmol. 8, 272 (2002)  
E.M.Aguilar, M.Bellini, Eur.Phys.J. C42, 349 (2005)



- [41] A.Einstein and P.Bergmann, Ann. Math. 39 A938 685.
- [42] G. Nordström, Pys. Zeitschr 15, 504 (1914).
- [43] P.Jordan, Ann.Phys(Leipzig) 1, 219 (1947); Sitz.Preuss.Akad.Wiss. 33, 966 (1955)
- [44] P.Bergmann, Ann.Math.(Princeton) 49, 255(1948)
- [45] Y.Thiry, Com.Rend.Acad.Sci(Paris) 226, 216(1948)
- [46] G.Lessner, Phys.Rev. D25, 3203(1982)
- [47] H.Liu, P.S.Wesson, Class.Quant.Grav. 14, 1651(1997)
- [48] E.Anderson, *The Campbell-Magaard theorem is inadequate and inappropriate as a protective theorem for relativistic equations*. E-print: gr-qc/0409122
- [49] P.S.Wesson, *In defence of Campbell's theorem as a frame for new physics*, E-print: gr-qc/0507107
- [50] N.I.Katzourakis, *Bundly-Theoretical globalization of Campbell-Magaard embedding theorem in the context of MD gravity*, E-print: math-ph/0407067
- [51] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 3370
- [52] J. Ponce de Leon, Mod. Phys. Lett A 16 (2001) 2291
- [53] J.Ponce de Leon y P.S.Wesson, J.Math.Phys. 34, 4080(1993)
- [54] E.Alvarez, M.B.Gavela, Phys.Rev.Lett. 51, 931(1983)
- [55] A.Chodos, S.Detweiler, Phys.Rev.D21, 2167(1980)
- [56] J.E.Madriz Aguilar, M.Anabitarte, M.Bellini, Phys.Lett.B 632 (2006)6
- [57] D.S.Ledesma, M.Bellini, Phys.Lett.B 581 (2004)1.
- [58] M. Bellini, Nucl. Phys. B660: 389 -400, (2003).
- [59] J. E. Madriz Aguilar, M. Bellini, Phys. Lett. B 596 (2004)116;  
J. E. Madriz Aguilar, M. Bellini, Eur. Phys. J. C 38 (2004) 367.
- [60] E. Madriz Aguilar and M. Bellini, Eur. Phys. J. C38, 123-128, (2004).

- [61] M. Bellini, Phys. Lett. B609: 187-193, 2005.
- [62] J.E.Madriz Aguilar, Tesis Doctoral "*Cosmología inflacionaria desde un vacío pentadimensional*" (2006)
- [63] E.J.Copeland, E.W.Kolb, A.R.Liddle, J.E.Lidsey, Phys.Rev.D 48 (1993)2529.
- [64] C.van de Bruck, M.Dorca, R.H.Brandenberger, A.Lukas, Phys.Rev.D 62 (2000)2529.
- [65] latest edition of 'Review of Particle Physics', W.-M.Yao t al., Journal of Phys. G 33, 1 (2006)