Evolución lineal de los campos tensoriales en el universo temprano desde un vacío en 5D

Autor: Silvina Paola Gómez Martínez
Director: Dr. Mauricio Bellini

Departamento de Física,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad Nacional de Mar del Plata,
Deán Funes 3350, (7600) Mar del Plata,
Buenos Aires, Argentina.

Abril de 2008

A mi familia...

Acerca del amor y la pasión

"Juzga tu éxito por el grado en que disfrutes de paz, salud y amor".
Gracias a todas las personas que me hicieron, con sus sentimientos, merecedora de todo lo que disfruto...Gracias a mi familia que me permitió llegar tan lejos. Muchas gracias mamá por todo tu amor, por todo tu apoyo, por toda la comprensión, por el esfuerzo, que siendo que siendo tan grande, me hiciste ver que siempre se puede dar un poco más. Siempre fuiste y seguirás siendo mi ejemplo. Gracias papá por haber creído en mí. Gracias a mis hermanos, Lucas y Luisina por haberme llenado de alegría la vida, por todos los juegos compartidos que terminaron en risas. Muchas gracias a mis "Viejos tíos", por todo el esfuerzo.
Gracias a mis "amigas de la vida", Mary, Flor, Sil, porque aunque llevemos caminos distintos, todavía siento que las tengo a mi lado. Gracias Emi, que todavía nos quedan cosas por compartir...Gracias a Pupi, por todo su cariño y ternura.
Gracias a todos los que hicieron que la carrera sea una aventura, a todos mis compañeros que estuvieron ayudándome a entender, que me tuvieron paciencia.
Muchas gracias Mauricio, porque realmente me sentí muy acompañada, por todas las palabras de aliento, por toda la dedicación, porque la pasión que demostrás por tu trabajo me guió el camino que quiero seguir.
Gracias a todas las personas del departamento de Física, que año a año me brindaron su apoyo.
Todos ustedes me demostraron lo importante que es el amor por las personas y la pasión por el trabajo...por que el amor y la pasión son magnitudes infinitas, pero se demuestran día a día.

Introducción

Inflación es un término general utilizado para describir el universo primordial. Durante este período, extremadamente corto, el universo sufrió una expansión acelerada, cuasi-exponencial. La teoría inflacionaria como la conocemos hoy, fué propuesta a principios de la década de los 80 por Alan Guth [1], mientras exploraba las Teorías de la Gran Unificación de la física de partículas. Estas teorías tienen como marco necesario al universo joven, debido a que son necesarias energías y temperaturas extremadamente altas para que las fuerzas no se desacoplen. Según Guth, algunas regiones del universo pudieron superenfriarse entrando en un estado de falso vacío, en el que la gravedad pierde su naturaleza atractiva para convertirse en una fuerza repulsiva. Como resultado, estas regiones pudieron haber sufrido una breve pero abrupta expansión, conocida como inflación. Sin embargo el modelo de Guth, predecía un universo post inflacionario demasiado inhomogéneo, por lo que se abandonó ese modelo.

Posteriormente, en 1982 Linde [2] por un lado, y Albrech y Steinhardt [3] por otro propusieron un modelo conocido como nueva inflación. Sin embargo éste predecía variaciones de temperatura en la radiación de fondo de microondas mucho mayores de las que se observaban. Poco tiempo más tarde, el mismo Linde propuso un modelo conocido como inflación caótica. Este modelo predice los primeros instantes de la evolución del universo, en donde éste se expande cuasi exponencialmente en un estado con una densidad de energía dominada por el potencial de algún campo escalar. Esta rápida expansión provocó la planaridad, homogeneidad e isotropía del universo. Luego, la densidad de energía potencial del campo escalar se transformó en energía térmica y apartir de allí, el universo puede describirse por el modelo cosmolgíco estándar.

La enorme aceptación de los modelos inflacionarios, han hecho que actualmente sea prácticamente imposible prescindir de ésta hipótesis en cualquier estudio cosmlógico moderno.

La idea de que el universo puede ser de múltiples dimensiones ha generado un gran interés. Las teorías de dimensiones extras han pasado a ser parte activa de la física de partículas, relatividad general y cosmología. En algunas de estas teorías las dimensiones extras son extendidas y llamadas teorías de Kaluza-Klein no compactas. De éstas existen dos versiones, una es la teoría de Espacio-Tiempo-Materia (STM) o Materia Inducida (TMI) y la otra se refiere a los modelos de Brane-World (BW), en donde nuestro universo es una hipersuperficie de cuatro dimensiones dentro de un espacio-tiempo de cinco dimensiones.

En relatividad general las ecuaciones de Einstein no sólo describen la interacción gravitacional a través de la curvatura del espacio-tiempo generada por la masa y la energía, sino que también predice la existencia de perturbaciones de la curvatura propagándose con velocidad c en el espacio-tiempo plano y vacío. Estas perturbaciones tensoriales conducen a las ondas gravitacionales.

Las ondas gravitacionales representan un punto muy importante, ya que prometen jugar un papel central en la astrofísica, la cosmología y la física teórica.

La observación directa de las ondas gravitacionales abrirá completamente un nuevo campo; la astronomía de las ondas gravitacionales. Es de esperar que ocacione una revolución en nuestro conocimiento del universo para permitir la observación de fenómenos que hasta ahora no han sido vistos.

El objetivo de esta tesis consiste en estudiar la evolución en el universo temprano de los campos tensoriales que serían resposables de producir dichas ondas. Lo haremos utilizando algunas ideas de la Teoría de Materia Inducida, desde un vacío pentadimensional construído sobre una métrica pentadimensional plana (en el sentido de Riemann).

La presente tesis consta de cuatro capítulos. El primero trata el Modelo Cosmológico Estándar y el formalismo de la teoría inflacionaria, donde se describen las ecuaciones fundamentales que serán utizadas para el desarrollo del cuarto capítulo. El segundo capítulo nos introduce a las teorías perturabativas, donde haremos una clasificación de ellas de acuerdo a la forma en que los campos son construídos bajo transformaciones de coordenadas. Esta clasificación será útil para comprender el tercer capítulo, en el cuál hacemos una descripción de la teoría de las ondas gravitacionales y los experimentos propuestos para su detección. Luego introducimos el formalismo de ondas gravitacionales en 4D. Finalmente, en el cuarto capítulo, trabajamos en una teoría de vacío en 5D, donde obtendremos la dinámica de las fluctuaciones tensoriales, para luego hacer una foliación sobre la quinta coordenada y obtener la dinámica efectiva en 4D. Todo esto en el marco de la teoría inflacionaria con un parámetro cosmológico decreciente. Finalmente, se discuten las conclusiones del trabajo realizado.

Contents

Chapter 1

Modelo Cosmológico Estándar y Formalismo de Inflación

El Modelo Cosmológico Estándar, es el que se ha favorecido con las recientes generaciones de datos observacionales, sin embargo no está libre de problemas. Hasta finales de la década de los '70, el Modelo Cosmológico Estándar no podía explicar la homogeneidad e isotropía a gran escala detectada en la radiación cósmica de fondo, y mucho menos las pequeñas desviaciones de éstas a escalas angulares menores a 1 de arco. Los problemas de éste modelo tuvieron una solución con la aparición de la teoría Inflacionaria. La teoría Inflacionaria surgió como intento de resolver los problemas del Modelo Cosmológico Estándar, tales como la creación de monopolos magnéticos. Posteriormente resultó que inflación resolvía enigmas adicionales del Modelo Cosmológico, como la generación de perturbaciones cosmológicas y el problema de planaridad.
En la siguiente sección estudiaremos conceptos fundamentales de dicho modelo.

1.1 El Modelo Cosmológico Estándar

El Modelo Cosmológico Estándar postula que a escalas suficientemente grandes, el universo es espacialmente isotrópico y homogeneo. Esta suposición en cosmología es llamada "Principio Cosmológico". Este principio es muy restrictivo y las únicas métricas compatibles con él son las del tipo

Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)\right]. \tag{1.1}$$

Las distancias físicas estarán dadas por el factor de escala del universo $a(t)$, y la constante k caracteriza la curvatura espacial. El universo es cerrado si $k > 0$, abierto si $k < 0$ y plano si $k = 0$. Por convención reescaleamos r y $a(t)$, de modo que el parámetro k asuma los valores $-1, 0, 1$, en universos topológicamente cerrados, planos o abiertos respectivamente.
Las ecuaciones de Einstein

$$G^{00} = 8\pi G T^{00} \quad 0\ tiempo \tag{1.2}$$
$$G^{ii} = 8\pi G T^{ii} \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.3}$$

se completan proponiendo la forma de un fluído ideal para el tensor de energía impulso

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} \ + \ (p+\rho)u^{\mu}u^{\nu}, \tag{1.4}$$

donde $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ es un tetravector unitario en la dirección temporal, $p \equiv p(\rho)$ es la presión y $\rho \equiv \rho(t)$ es la densidad de energía. Así las ecuaciones de Einstein (1.2) y (1.3) se reducen a

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p) \tag{1.5}$$
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{k}{a^2}, \tag{1.6}$$

donde $\ddot{a} > 0$ indica universo acelerado mientras que $\ddot{a} < 0$ universo desacelerado y el punto implica derivada con respecto al tiempo. Combinando las ecuaciones (1.5) y (1.6) obtenemos una relación para la conservación de la energía

$$\frac{d}{dt}\left(a^3\rho\right) = -p\frac{d}{dt}\left(a^3\right), \tag{1.7}$$

que garantiza una expansión adiabática. En cosmología, un valor importante es el factor de escala a, de éste se puede definir la cantidad $H \equiv \dot{a}/a$ que se conoce como parámetro de Huebble, cuyo valor actual se denota

$$H_0 = h_0(100\, km/sMpc) = h_0(9.78\, años)^{-1}, \tag{1.8}$$

donde el valor de h_0 se estima entre 0.4 y 1 [4, 5], $1pc = 3.262\, ly$ y $1M \equiv 10^6$. Si el universo es plano, $k = 0$, entonces de la ecuación (1.6) se tiene

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c, \tag{1.9}$$

y de aquí puede calcularse la densidad de energía crítica $\rho_c = 1.87\, 10^{-29}\, h_0^2\, gr.cm^{-3}$. Ahora definimos un valor adimensional Ω mediante el cociente ρ/ρ_0, cuyo valor actual se denota por Ω_0 y se encuentra en el rango [4, 5]

$$0.1 \leq \Omega_0 \leq 2. \tag{1.10}$$

En lo que sigue, veremos algunas ideas principales de la historia térmica del universo.
En los primeros instantes, el universo estará dominado por partículas relativistas. A esta etapa se la conoce como era dominada por radiación y por lo tanto la densidad de energía dependerá de la temperatura

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} N_{ef} T^4, \tag{1.11}$$

donde N_{ef} es el número efectivo de grados de libertad de las partículas relativistas, que está relacionado con el número de grados de libertad de las partículas bosónicas $N_b = \sum_b g_b$ y fermiónicas $N_f = \sum_f g_f$

$$N_{ef} = N_b + \frac{7}{8} n_f. \tag{1.12}$$

La densidad de entropía s para una región comovil del universo con volumen $\frac{4}{3}\pi a^3$ es

$$s = \frac{2\pi^2}{45} N_{ef} T^3. \tag{1.13}$$

Si suponemos una expansión adiabática del universo, entonces la energía debe conservarse. Por lo tanto, para un universo muy grande de especies relativistas, se tiene

$$a \propto T^{-1}. \tag{1.14}$$

Haciendo uso de la ecuación (1.11) se encuentra que

$$\rho \propto a^{-4}, \tag{1.15}$$

que es válida para etapa donde el universo es dominado por radiación. La ecuación (1.15) puede reemplazarse en la (1.6), de este modo, si el término de curvatura $-k/a^2$ es despreciable frente a los demás, se obtiene la solución

$$a \propto t^{1/2}. \tag{1.16}$$

Consecuentemente, el parámetro de Hubble $H(t) = \dot{a}/a$ está dado por

$$H(t) = \frac{1}{2t}, \tag{1.17}$$

en general $H(t) = p/t$, y así notamos que para el universo dominado por radiación $p = 1/2$, además de la ecuación de Einstein (1.6) se encuentra para (para $k = 0$)

$$T^2 = \left(\frac{45}{\pi^3 N_{ef}}\right)^{1/2} \frac{M_p}{4t}, \tag{1.18}$$

donde $M_p = G^{-1/2} = 1.2 \times 10^{19}$ GeV, se conoce como la masa de Planck. La densidad de enegía debida a la radición va como $\rho_r \sim a^{-4}$, y la densidad de energía por materia lo hace como $\rho_m \sim a^{-3}$. A medida que el universo crece , el factor de escala $a(t)$ aumenta hasta que ρ_r es despreciable frente a ρ_m. A partir de este momento la densidad de energía total ρ es

$$\rho \propto a^{-3}. \tag{1.19}$$

Insertando la ecuación (1.19) en la ecuación (1.6) para un universo plano obtenemos

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}. \tag{1.20}$$

Si la relación entre ρ_r y ρ_m se invirtió, veamos en que momento se dió la igualdad

$$\rho_m = \rho_0 \left[\frac{a_0}{a(t)}\right]^3 \simeq \rho \left[\frac{T_\gamma(t)}{T_{\gamma_0}}\right]^3 \simeq \rho_r = \frac{\pi^2}{30} N_{ef} T_\gamma^4(t), \tag{1.21}$$

siendo ρ_0 la densidad de enegía actual, t_0 el tiempo actual, $T_{\gamma_0} = 2.7\, T_0 K$ el valor actual de la temperatura debido al desacoplamiento radiación-materia y $T_\gamma \simeq h_0^2 T_0^{-3} eV$ (aproximadamente 6000 K el momento en que $\rho_r = \rho_m$). Y haciendo uso de la ecuación (1.18), esta temperatura corresponde a $t = 1.25 \times 10^3 T_0^6 h_0^{-4}\, años \simeq 40000\, años$. Desde entonces, el universo ha estado dominado por materia.

1.2 Problemas del Modelo Cosmológico Estándar

El Modelo Cosmológico Estándar fué aceptado por gran parte de la comunidad científica porque predice con éxito la expansión de Hubble, la radiación cósmica de fondo y la abundancia relativa de los gases livianos, pero se encuentran problemas a escalas temporales $t < 10^{-35}$. En lo que sigue, haremos una descripción de dichos problemas.

1.2.1 Problema de la planaridad del universo

Este problema fué detectado en 1979 a partir de un trabajo de Dicke y Peebles [6]. Se sabe que $\Omega \cong 1$ es el valor actual, pero si vamos más atrás en el tiempo, vemos que el universo fué más plano aún.
Trataremos el problema de planaridad de un modo cualitativo, considerando el comportamiento de $\frac{(\Omega-1)}{\Omega}$, de la ecuación de Einstein (1.6) es fácil ver que $k = 0$ (curvatura nula) corresponde a $\Omega = 1$, usando la ecuación (1.9) obtenemos

$$\frac{2k}{a^2} = H^2[\Omega - 1], \tag{1.22}$$

dividimos ambos términos por el factor $H^2\Omega$

$$\frac{(\Omega - 1)}{\Omega} = \frac{3k}{4\pi G\rho a^2}, \tag{1.23}$$

eliminamos el factor de escala utilizando la ecuación $a^2 = \left(\frac{S}{s}\right)^{2/3}$

$$\frac{(\Omega - 1)}{\Omega} = \frac{3k}{4\pi G\rho}\left(\frac{s}{S}\right)^{2/3}. \tag{1.24}$$

Esta última ecuación es muy útil debido a que s y ρ se pueden expresar en términos de la temperatura (1.13), (1.19) y la entropía total S se mantiene constante a medida que el universo evoluciona, dado que se supone una expansión adiabática. Para calcular el valor de S, tendremos en cuenta la ecuaciones (1.6) y (1.9), entonces el factor de escala resulta

$$a^2 = \frac{k}{H^2(\Omega - 1)}, \tag{1.25}$$

y por lo tanto la entropía total es

$$S = \left[\frac{k}{H^2(\Omega - 1)} \right]^{3/2} s. \tag{1.26}$$

Si tomamos $|\Omega - 1| < 1$, $H^{-1} = 10^{10} a\tilde{n}os = 10^{60} t_p = \frac{10^{60}}{M_p} = 10^{41} GeV^{-1}$, entonces $H^{-3} = 10^{123} GeV^{-3}$, y resulta

$$S > 10^{87}, \tag{1.27}$$

el cual es un valor muy grande. Esto es una consecuencia de la extrema planaridad del universo. En el contexto del modelo cosmológico estándar, S es un parámetro que viene dado por las condiciones iniciales , y es de esperar que sea del orden de la unidad.

Se puede calcular el orden de Ω, usando la ecuación (1.24), en el instante en que tuvo lugar la transición de fases en las Teorías de Gran Unificación (TGU), o sea cuando la temperatura era aproximadamente $T \approx 10^{14}\, GeV$, y se encuentra

$$|\Omega - 1| \leq 10^{-49}. \tag{1.28}$$

Finalmente, en la escala de Planck, se tiene

$$|\Omega - 1| \leq 10^{-59}. \tag{1.29}$$

El problema de la planaridad, radica en entender como Ω tuvo un valor tan cercano a la unidad cuando el universo era tan joven. Dado que el Modelo Cosmológico Estándar no puede explicarlo, nos vemos en la necesidad que el problema se resuelva mediante una nueva teoría.

1.2.2 El problema del horizonte

Otro problema es el del horizonte, y fué puesto en evidencia por Rindler en 1956 [7]. De acuerdo con las observaciones experimentales para radiación cósmica de fondo, el universo es muy homogéneo a gran escala. La temperatura efectiva de la radiación cósmica de fondo es isotrópica en una parte en 1000, aunque gran parte de esa anisotropía se explica por el movimiento de la tierra a través de la radiación de fondo. Si se desprecia la contribución debida al movimiento de la tierra, entonces la anisotropía residual es menor que una parte en 100000. Esta extrema uniformidad es muy difícil de entenderse en el contexto del Modelo Cosmológico Estándar. Si se consideran dos antenas de microondas dirigidas en direcciones opuestas, cada una recibirá radiación emitida en el momento t_r en que el hidrógeno re recombinó. Esto sucedió alrededor de 10^5 años después del Big Bang. En este momento la temperatura era de unos 4000 K. En el momento de la emisión esas dos fuentes estaban separadas una de la otra varias veces la distancia del horizonte causal. Dicho horizonte está dado por la distancia que un pulso de luz habría atravesado desde la singularidad inicial. Si se supone $\Omega \approx 1$, y se calcula la distancia del horizonte en el período dominado por materia, la distancia entre fuentes de radiación cósmica será

$$r_{coord} = \int_{t_r}^{t_0} \frac{dt'}{bt'^{2/3}} = 3b^{-1}(t_0^{1/3} - t_r^{1/3}), \tag{1.30}$$

donde hemos considerado $a(t) = bt^{1/3}$ con b constante. El valor de la coordenada debida a la distancia de horizontes para t_r será

$$l_{H,coord} = \int_0^{t_r} \frac{dt'}{bt'^{2/3}} = 3b^{-1}t_r^{1/3}. \tag{1.31}$$

El cociente entre estas cantidades es

$$N = \frac{2r_{coord}}{l_{H,coord}} = 2\left[\left(\frac{t_0}{t_r}\right)^{1/2} - 1\right] = 2\left[\left(\frac{T_r}{T_0}\right)^{1/2} - 1\right] \approx 75. \tag{1.32}$$

El problema radica en entender cómo dos regiones apartadas por distancias tan grandes pueden estar a la misma temperatura. El problema es todavía más profundo si se considera que las fuentes estaban casualmente desconectadas en el momento de la emisión. En la teoría cosmológica estándar la homogeneidad de la temeratura se considera como una condición inicial sin que exista una justificación proveniente del modelo mismo.

1.2.3 El problema de los monopolos magnéticos

En el contexto de las partículas físicas de las TGU, el Modelo Cosmológico Estándar predice a una gran producción de monopolos magnéticos. Tales monopolos son los nudos topológicos estables del campo de Higgs. Supongamos que el campo de Higgs está caracterizado por una longitud de correlación ξ. Si consideramos una región cúbica del espacio con lados ξ, el campo de Higgs sobre una cara del cubo será independiente del campo de Higgs sobre la cara opuesta. Podemos estimar que cada cubo con volumen ξ^3 se corresponde a un nudo topológico del valor de espectación del campo de Higgs, de modo que la densidad de monopolos queda aproximadamente dada por [8, 9]

$$n_M \approx \xi^{-3}. \tag{1.33}$$

Como este argumento es poco riguroso, cabe esperar un error de uno o dos órdenes de magnitud en el resultado de la expresión (1.33) Aún así dicho argumento posibilita establecer el problema de manera facilmente entendible.

Sea $T_c \approx 10^{14}\, GeV$ la temperatura de transición de fase en las TGU para la fase $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. De la ecuación (1.18) puede obtenerse el tiempo que tarde en producirse la transición de fase para $N_{ef} \approx 10^2$, obteniendose $t_c \approx 10^{-35}$ segundos. Puede mostrarse [1] que el campo de Higgs tuvo tiempo para recobrar su equilibrio térmico antes que la transición de fase tuviera lugar. Por ese motivo, para $T > T_c$, la longitud de correlación debe estar dada solamente por la longitud de escala relevante, dada por la inversa de la temperatura T^{-1}. Argumentos de causalidad restringen la longitud de correlación del campo de Higgs a ser menor que la distancia del horizonte

$$l_H = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \tag{1.34}$$

que es la distancia total que un pulso luminoso recorre desde la singularidad inicial. En el Modelo Cosmológico Estándar, el factor de escala es proporcional a $t^{1/2}$ en la era dominada por materia, por lo que $l_H = 2t$. Como la transicón de fase ocurre muy rápidamente, la ecuación (1.33) nos da la densidad aproximada de monopolos magnéticos

$$n_M \approx \xi^{-3} \geq \frac{1}{8t_c^3}. \tag{1.35}$$

En 1979 Preskill [10] mostró que a densidades cercanas a $(8t_c^3)^{-1}$ la aniquilación de monopolos-antimonopolos queda sin efecto. Debido a que la masa de los monopolos es de $m_M \approx 10^{16}\, GeV$, éstos se comportan como partículas no relativistas con una densidad que disminuye como a^{-3} con la expansión del universo. La densidad de energía debida a los pares monopolo-antimonopolo es

$$\rho_M = n_M m_M \propto a^{-3}. \tag{1.36}$$

También es útil evaluar el cociente ρ_M/s. Como el numerador y el denominador disminuyen como $a^{-3}(t)$ cuando el universo se expande, el cociente ρ_M/s permanece constante. Su valor puede encontrarse a partir de las ecuaciones (1.13), (1.18) y (1.33) obteniendose la desigualdad

$$\rho_M/s \geq c(N_{ef})^{1/2}\frac{m_M T_c^3}{M_p^3}, \tag{1.37}$$

donde $c = 4\pi^2(\pi/45)^{1/2} = 10.4$. El valor actual para la densidad de entropía, s_0, puede ser calculado usando la ecuación (1.13), suponiendo a esta dominada por la contribución de fotones y neutrinos

$$s_0 = \frac{2\pi^2}{45}\left(2T_\gamma^3 + \frac{7}{4}N_\nu T_\nu^3\right), \tag{1.38}$$

donde N_ν es el número de espacies de neutrinos y T_ν la temperatura de los neutrinos. Tomando $N_\nu = 3$, se encuentra

$$s_0 = 2.8 \times 10^3 cm^{-3}, \tag{1.39}$$

y

$$\rho_M \leq 5 \times 10^{-18}\, gr.cm^{-3}. \tag{1.40}$$

Ahora se puede comparar ρ_M con la densidad crítica ρ_c dada por $\rho_c = 1.87 \times 10^{-29}\, h_0^2 gr.cm^{-3}$ y tomando $h_0 \approx 1$, se encuentra

$$\Omega_M \equiv \rho_M/\rho_c \geq 3 \times 10^{11}, \tag{1.41}$$

que es incompatible con los límites observacionales para Ω_0.

1.2.4 Origen de las fluctuaciones de densidad de energía

Aunque el universo se ve homogéneo a escalas mayores que unos 10^8 años luz, a escalas menores se ven estructuras de materia a las que conocemos como galaxias, cúmulos, etc. El Modelo Comológico Estádar no provee un mecanismo natural que produzca las fluctuaciones iniciales de materia que dan origen a estas estructuras. La situación se vuelve dramática en la medida que uno quire describir el universo alrededor de los $t \approx 10^{-35}$

segundos, ya que allí las perturbaciones de densidad de materia son gravitacionalmente inestables. En los primeros instantes, las fluctuaciones de materia deben haber sido muy pequeñas de acuerdo a una distribución de materia muy uniforme. A los $t \approx 10^{-35}$ segundos deberíamos esperar que las perturbaciones fueran muy pequeñas. Supondremos que el universo está domnado por radiacón y es globalmente isotrópico y hommogéneo, de esta forma puede ser descripto por una métrica de FRW, y como las fluctuaciones locales de la densidad se suponen pequeñas, entonces basta considerar una expansión a primer orden para las fluctuaciones $\delta\rho(\vec{r},t)$, respecto a su valor espacialmente homogéneo $\rho_0(t)$

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0(t) + \delta\rho(\vec{r},t). \tag{1.42}$$

Lo que sigue es escribir las ecuaciones de relatividad general que describen la evolución de $\delta\rho$, y el cambio que inducen en la métrica . Luego hacemos una transformada de Fourier de las ecuaciones linealizadas para obtener un sistema de ecuaciones resoluble. Así se encuentra que el comportamiento de la transformada $\delta\hat{\rho}(\vec{r},t)/\rho_0(t)$, depende de las magnitudes relativas de la longitud de onda física $l = ka$ y de la longitud de Hubble $H^{-1} = 2t$. En los primeros instantes del universo, es mayor la longitud de Hubble y luego la situación se invierte. Consideremos ahora el crecimiento de las perturbaciones en la escala correspondiente a galaxias típicas. Para que puedan formarse las galaxias, es necesario que las perturbaciones a esa escala hayan entrado en el régimen no lineal muchos millones de años atrás, cuando la longitud de onda física se equiparó a la longitud de Hubble, esto implica que el valor de $\delta\hat{\rho}/\rho$ debe haber sido del orden de 10^{-4}, de aquí se puede estimar el instante en el que esto se produjo. Luego

$$\frac{\delta\hat{\rho}}{\rho}(escala\, galáctica) \approx 5 \times 10^{-49}, \tag{1.43}$$

para $t = 10^{-35}$ segundos. Para tener una idea de la magnitud de este resultado podemos compararlo con las fluctuaciones de Poisson $1/N^{1/2}$, que son carácteristicas de cualquier gas de partículas asociado con una galaxia típica ($N \simeq 10^{79}$ es el número de partículas de una galaxia típica)

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{N^{1/2}} \approx 3 \times 10^{-40}. \tag{1.44}$$

Estas fluctuaciones son nueve órdenes de magnitud más grandes que aquellas permitidas por el Modelo Cosmológico Estándar. En tiempo de Planck

($t_p \simeq 10^{-43}$) este resultado es

$$\frac{\delta\hat{\rho}}{\delta}(galaxias) \approx 5 \times 10^{-57}, \tag{1.45}$$

esto significa que las fluctuaciones requeridas según el Modelo Cosmológico Estándar son 17 órdenes de magnitud menores que las fluctuaciones de Poisson. Por ello, el Modelo Cosmológico Estándar aplicado a tiempos anteriores a los 10^{-35} segundos, predice fluctuaciones de densidad mucho más pequeñas que $1/N^{1/2}$, lo cuál se da en sistemas cuánticos muy ordenados, como es el caso de radiación térmica cuántica de bosones o fermiones, o el caso de gases clásicos en equilibrio térmico.

El problema de fluctuaciones de densidad puede verse como una versión local del problema de planaridad.

1.3 Formalismo de Inflación: Aproximación semiclásica

Consideremos la acción

$$I = -\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + V(\varphi)\right], \tag{1.46}$$

donde φ es un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad, llamado campo inflatón, R es la curvatura escalar del espacio-tiempo $ds^2 = -dt^2 + a^2dr^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, en una métrica de FRW con $k = 0$, $V(\varphi)$ es un potencial asociado al operador de campo $\varphi(\vec{x}, t)$ y las comas denotan derivadas parciales ordinarias. De esta forma la densidad lagrangiana está dada por

$$\mathcal{L}(\varphi, \varphi_{,\nu}) = -\sqrt{-g}\left[\frac{\mathcal{R}}{16\pi G} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} + V(\varphi)\right], \tag{1.47}$$

y mediante la ecuación de Lagrange,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\mu}}\right) = 0, \tag{1.48}$$

se halla la ecuación de movimiento para el campo inflatón

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\varphi + V'(\varphi) = 0, \tag{1.49}$$

donde los puntos denotan derivadas respecto del tiempo, la prima indica derivada respecto del campo φ y además $\dot{a}/a = H_c$, donde H es el parámetro de Hubble.
La densidad Hamiltoniana es

$$\hat{\mathcal{H}} = \Pi^0\varphi_{,0} - \mathcal{L}, \tag{1.50}$$

donde

$$\Pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,\mu}}. \tag{1.51}$$

Se puede hallar una expresión para la densidad de energía ρ en función del operador cuántico φ

$$\hat{\mathcal{H}} = a^3\left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{1}{2a^2}(\nabla\varphi)^2 + V(\varphi)\right] = a^3\rho. \tag{1.52}$$

Y así, teniendo la expresión para ρ y la ecuación (1.9), hallamos la ecuación de Friedmann, que no es más que la ecuación de Einstein en la métrica de FRW,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left\langle\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{1}{2a^2}(\nabla\varphi)^2 + V(\varphi)\right\rangle. \tag{1.53}$$

El problema para resolver esto, reside en que φ es un campo cuántico. Dada la dificultad trataremos de construir una teoría semiclásica, haciendo la expansión

$$\varphi(t,\vec{x}) = \phi_c(t) + \phi(\vec{x},t), \tag{1.54}$$

donde $\phi_c(t)$ es un campo clásico, y $\phi(\vec{x},t)$ es una corrección cuántica. Dicha expansión es válida siempre que las fluctuaciones cuánticas sean pequeñas.

Ahora vamos a reemplazar esta expansión en la ecuación de movimiento (1.49), y obtendremos un par de ecuaciones para las componentes ϕ_c y ϕ.

1.3.1 Dinámica del campo clásico ϕ_c

Una vez reemplazada la expansión semiclásica en la ecuación de movimiento (1.49), definimos nuestro cero de energía tal que

$$\ddot{\phi}_c + 3H\dot{\phi}_c + V'(\phi_c) = 0, \tag{1.55}$$

esta expresión aún no puede resolverse, debido a que H es un operador cuántico. Veamos una forma de trabajar H de modo que pueda considerarse clásico. Para ello utilizamos la ecuación (1.53), la expansión semiclásica (1.54), y el desarrollo del potencial $V'(\varphi)$ alrededor de ϕ_c. Así se obtiene

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{\dot{\phi_c}^2}{2} + V(\phi_c)\right] + \frac{8\pi G}{3}\left\langle \frac{\dot{\phi_c}^2}{2} + \frac{1}{2a^2}(\nabla\phi)^2 + \sum_{n=1} \frac{V^n(\phi_c)}{n!}\,\phi^n \right\rangle, \tag{1.56}$$

donde se ha considerado que $<\phi> = <\dot{\phi}> = 0$. El primer término es puramente clásico y ϕ_c representa el campo que infla el universo. Por ésto es llamado Inflatón; el segundo término representa las rugosidades, que a gran escala son despreciables. Hasta ahora logramos obtener H^2, lo que sigue es expandir en serie y consideramos $H^2 = H_c^2(t) + \langle fluct\ peque\tilde{n}as \rangle$. Luego del desarrollo, tenemos

$$H^2 \simeq H_c^2 + 2H_c(H - H_c), \tag{1.57}$$

igualando (1.56) con (1.57), obtenemos

$$H \simeq H_c\left[1 + \frac{4\pi G}{3H_c^2}\left\langle \frac{\dot{\phi_c}^2}{2} + \frac{1}{2a^2}(\nabla\phi)^2 + \sum_{n=1} \frac{V^n(\phi_c)}{n!}\,\phi^n \right\rangle\right]. \tag{1.58}$$

Como el segundo término se desprecia a gran escala, resulta

$$\frac{\dot{a}}{a} = H \simeq H_c. \tag{1.59}$$

Con este resultado, la ecuación de movimiento (1.55) para el campo clásico ya puede resolverse, y además, del primer término de la ecuación (1.56) tenemos la ecuación de Einstein

$$H_c^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{\dot{\phi_c}^2}{2} + V(\phi_c)\right]. \tag{1.60}$$

Ahora trabajaremos la ecuación (1.60) a modo de ver como se vincula el potencial V con H_c. Derivando respecto del tiempo (1.60), tenemos

$$2H_c\dot{H}_c = \frac{8\pi G}{3}\left[\ddot{\phi}_c\,\dot{\phi}_c + \dot{V}\right], \tag{1.61}$$

y de (1.55), $\ddot{\phi}_c = -3H_c\,\dot{\phi}_c - V'(\phi_c)$. Entonces reemplazando en (1.61) y aplicando la derivada

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\phi_c}{dt}\frac{d}{d\phi_c} = \dot{\phi}_c\frac{d}{d\phi_c}, \tag{1.62}$$

se tiene

$$\dot{\phi}_c = \frac{-H_c'}{4\pi G} \equiv -\frac{M_p^2}{4\pi}\,H_c', \tag{1.63}$$

donde ahora la prima indica derivada respecto de ϕ_c, $G = 1/M_p^2$ y M_p es la masa de Planck. Reemplazando en la ecuación (1.60) y despejando adecuadamente, obtenemos una ecuación que vincula el potencial con H_c,

$$V(\phi_c) = \frac{3M_p^2}{8\pi}\left[H_c^2 - \frac{M_p^2}{12\pi}\,(H_c')^2\right]. \tag{1.64}$$

1.3.2 Aproximación en rodadura lenta del campo clásico

En la literatura encontramos dos versiones diferentes de la aproximación en rodadura lenta. La primera plantea restricciones sobre la forma del potencial, y requiere la evolución del campo escalar, para extenderse en forma asintótica. Esta aproximación es la más adecuada cuando estudiamos inflación y la llamaremos "Aproximación de rodadura lenta del potencial (PSRA)".
La otra forma de aproximación plantea condiciones sobre la evolución del parámetro de Hubble durante inflación, y llamaremos a ésta, "Aproximación de rodadura lenta de Hubble (HSRA)" [13].
Situándonos en la primera aproximación, la condición de rodadura lenta es que $\ddot{\phi}_c$ sea despreciable frente a los otros dos términos de la ecuación (1.55). Esto significa que el tiempo característico de variación de $\dot{\phi}_c$ es mayor que el tiempo característico de la expansión del universo ($\tau_d \gg \tau_H = H^{-1}$). Luego, la ecuación de movimiento resulta

$$\dot{\phi}_c \simeq -\frac{V'(\phi_c)}{3H_c}, \tag{1.65}$$

y la ecuación (1.64) queda

$$H_c^2 \simeq \frac{8\pi^2}{3M_p^2}V(\phi_c). \tag{1.66}$$

- La versión más simple es la de un campo escalar masivo no interactuante con el potencial efectivo $V_c = \frac{1}{2}m^2\phi_c^2$, donde m es la masa del campo escalar $\phi_c\,(m \ll M_p)$. Si inicialmente el campo escalar ϕ_c es suficientemente grande ($\phi_c \gg M_p$), entonces se puede mostrar que las funciones $\phi_c(t)$ y $a(t)$ rápidamente se aproximan al régimen asintótico:

$$\phi_c(t) = (\phi_c)_0 - \frac{mM_p}{2(3\pi^{1/2})}t, \tag{1.67}$$

$$a(t) = a_0 e^{2\pi\left[(\phi_c)_0^2 - \phi_c^2(t)\right]/M_p^2}. \tag{1.68}$$

De acuerdo con estas ecuaciones, durante el tiempo $\phi_c/(mM_p)$, el cambio del campo ϕ_c es pequeño. El potencial efectivo varía muy suavemente y el universo se expande cuasi exponencialmente

$$a(t + \Delta t) \approx a(t)e^{H_c \Delta t}, \tag{1.69}$$

La expansión inflacionaria del universo finaliza cerca del mínimo de potencial, esto es, cuando $\phi_c \approx (\phi_c)_e$. Luego el campo empieza a oscilar alrededor de su mínimo e ingresa en lo que se llama era de recalentamiento. De acuerdo con esta teoría[11], hay tres etapas diferentes. Durante la primera el campo escalar clásico comienza a oscilar, y decae en bosones masivos debido al fenómeno de resonancia paramétrica. Este estado se denomina precalentamiento. El segundo período consiste en el decaimiento de las partículas previamente producidas y finalmente éstas se termalizan con una temperatura T_r.
En el ejemplo considerado se tiene $(\phi_c)_e \approx 0.2$. Cuando $\phi_c \leq (\phi_c)_e$ el campo escalar oscila rápidamente, y si interactúa con otro campo de materia, su energía potencial $V(\phi_c) \approx \frac{m^2(\phi_c)_e^2}{2} \approx \frac{m^2M_p^2}{2}$ se transforma en energía térmica. La temperatura asociada T_r puede ser del orden de $(mM_p)^{1/2}$ o menor. Además, T_r no depende del valor inicial del campo, $(\phi_c)_0$, pero si del factor de escala $a(t)$. Este crece $e^{2\pi(\phi_c)_0^2/M_p^2}$, veces durante la inflación y el argumento $N_e = \frac{2\pi(\phi_c)_0^2}{M_p^2}$ se lo conoce como número de desdoblamientos exponenciales.

- El resultado anteriormente obtenido se puede generalizar para modelos con potenciales efectivos $V(\phi_c)$ más complicados.

Para que se cumplan las condiciones de rodadura lenta, deben satisfacerse las siguientes condiciones

$$\Theta = \frac{2}{K^2}\left(\frac{H_c'}{H_c}\right)^2 \ll 1, \tag{1.70}$$

$$\Sigma = \frac{2}{K^2}\frac{H_c''}{H_c} \ll 1, \tag{1.71}$$

donde $K = \frac{\sqrt{8\pi}}{M_p}$ [12]. La inflación termina cuando el factor de escala deja de acelerarse ($\ddot{a} \sim 0$). Además, $\Theta(\phi_c) = 1$, cuando el campo asume el valor $\phi_c = (\phi_c)_e$.
Finalmente, bajo la condición de rodadura lenta, ν y N_e pueden aproximarse a las expresiones:

$$\nu \sim -\frac{8\pi^2\phi_c}{M_p^2}\frac{V(\phi_c)}{V'(\phi_c)}, \tag{1.72}$$

$$N_e \sim -\frac{8\pi^2}{M_p^2}\int_{\phi_0}^{\phi_c} d\phi_c' \frac{V(\phi_c')}{V'(\phi_c')}. \tag{1.73}$$

1.3.3 Dinámica de las fluctuaciones

En la sección anterior se trabajó con las expresiones clásicas que describen la dinámica del campo inflatón y las ecuaciones de Einstein respecto de la métrica de fondo. Ahora trabajaremos con la ecuación para el campo cuántico ϕ, la cuál describe la dinámica de las fluctuaciones cuánticas del campo inflatón, ésta es

$$\ddot{\phi} + 3H_c\dot{\phi} - \frac{1}{a^2(t)}\nabla^2\phi + V''(\phi_c)\phi = 0. \tag{1.74}$$

Para simplificar el estudio de la componente cuántica, hacemos el cambio,

$$\phi = a^{-3/2}\chi, \tag{1.75}$$

y redefinimos el campo por χ. Así la ecuación para las fluctuaciones cuánticas $\chi(t,\vec{r})$, nos queda

$$\ddot{\chi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\chi - \left[\frac{9}{4}H_c^2 + \frac{3}{2}\dot{H}_c - V''(\phi_c)\right]\chi = 0. \tag{1.76}$$

Lo que sigue es hacer una expansión en serie de Fourier para el campo χ

$$\chi(t,\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \left[a_k e^{i\vec{k}\vec{r}} \xi_k(t) + a_k^{\dagger} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \xi_k^*(t) \right], \tag{1.77}$$

donde a_k y $a_k^{\dagger}$, son respectivamente los operadores de aniquilación y creación. Estos operadores describen el álgebra

$$\left[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k'}}^{\dagger} \right] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k'}), \tag{1.78}$$

$$[a_k, a_{k'}] = \left[a_k^{\dagger}, a_{k'}^{\dagger} \right] = 0. \tag{1.79}$$

Introduciendo la ecuación (1.77) en la ecuación de movimiento para χ, tenemos

$$\ddot{\xi_k}(t) + \frac{1}{a^2} \left[k^2 - a^2 \left(\frac{9}{4} H_c^2 + \frac{3}{2} \dot{H}_c - V''(\phi_c) \right) \right] \xi_k(t) = 0, \tag{1.80}$$

donde llamaremos $\mu^2(t) = \left(\frac{9}{4} H_c^2 + \frac{3}{2} \dot{H}_c - V''(\phi_c) \right)$ y $k_0^2(t) = a^2 \left(\frac{9}{4} H_c^2 + \frac{3}{2} \dot{H}_c - V''(\phi_c) \right)$. Este es el número de onda que delimita el sector infrarojo inestable del sector asociado a longitudes de onda corta. Así, la ecuación (1.80) se puede expresar

$$\ddot{\xi_k}(t) + a^{-2} \left[k^2 - k_0^2(t) \right] \xi_k(t) = 0. \tag{1.81}$$

Ahora denotaremos $\omega_k^2(t) = a^{-2} [k^2 - k_0^2(t)]$, entonces para cada valor de k tendremos una frecuencia diferente que además depende del tiempo. Cuando $\omega_k^2 > 0$, tendremos soluciones estables y si $\omega_k^2 < 0$, las soluciones serán inestables. Estas soluciones son propias de las "grandes" escalas, o sea longitudes de onda mayores que el horizonte causal. Como k_0 aumenta con el tiempo , algunos modos que en un principio estaban en el sector de onda corta pasarán al sector de onda larga. Este punto es muy importante para luego definir el campo de grano grueso.

Ahora, para que la teoría sea consistente, estudiaremos la naturaleza cuántica del campo χ. Esto es que χ y $\dot{\chi}$ cumplan con las relaciones canónicas de conmutación

$$[\chi(\vec{r},t), \dot{\chi}(\vec{r},t)] = i\delta^3(\vec{r} - \vec{r'}). \tag{1.82}$$

Lo que resta es ver qué condiciones impone este conmutador sobre los modos $\xi_k(t)$. La condición que surge de (1.82) es

$$\xi_k \dot{\xi_k}^* - \xi_k^* \dot{\xi_k} = i, \tag{1.83}$$

que será la condición de normalización de los modos ξ_k.

1.4 El campo de grano grueso

En los últimos años, se ha propuesto estudiar las fluctuaciones cuánticas, definiendo un campo de grano grueso sobre un volumen mayor que el del horizonte. El tamaño del horizonte (l_h) se define como

$$l_h = \frac{a}{k_0}. \tag{1.84}$$

Siguiendo con esta propuesta definimos un campo de grano grueso χ_L donde se pesen sólo aquellos modos con longitudes de onda larga, para luego estudiar bajo que condiciones dichos modos pueden ser considerados como clásicos.
Estudiar la evolución de este campo, nos dará información importante acerca de la dinámica de las fluctuaciones del campo de materia durante el período inflacionario en la escala que luego dió lugar el universo al que tenemos acceso causal en la actualidad.
Definimos el campo de grano grueso como

$$\chi_L = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, \theta_1(\epsilon k_0 - k) \left[a_k e^{i\vec{k}\vec{r}} \xi_k(t) + a_k^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r}} \xi_k^*(t) \right], \tag{1.85}$$

donde $\theta_1(\epsilon k_0 - k)$ preserva los modos tales que $\epsilon k_0 - k > 0$, $\epsilon \simeq 10^{-3}$ y además $\dot{\theta}$ debe ser una función integrable en el espacio k.
Para el campo χ tenemos la ecuación de movimiento

$$\ddot{\chi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\chi - \frac{k_0^2}{a^2}\chi = 0. \tag{1.86}$$

Lo que sigue es descomponer χ en

$$\chi = \chi_L + \chi_S \tag{1.87}$$

donde el campo χ_S se define como

$$\chi_L = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k\, \theta_2(k - \epsilon k_0) \left[a_k e^{i\vec{k}\vec{r}} \xi_k(t) + a_k^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r}} \xi_k^*(t) \right], \tag{1.88}$$

luego de calcular las derivadas y reemplazar en la ecuación de movimiento (1.86) tenemos

$$\begin{aligned}\ddot{\chi_L} &- \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\theta_1\left[a_k e^{i\vec{k}\vec{r}}\ddot{\xi}_k + a_k^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r}}\ddot{\xi}_k^{\,*}\right] = \\ &- \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\ddot{\theta}_2\left[a_k e^{i\vec{k}\vec{r}}\xi_k + a_k^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r}}\xi_k^*\right] \\ &- \frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\dot{\theta}_2\left[a_k e^{i\vec{k}\vec{r}}\dot{\xi}_k + a_k^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r}}\dot{\xi}_k^{\,*}\right], \end{aligned} \tag{1.89}$$

y teniendo en cuenta que $\ddot{\xi}_k = -\omega_k^2\xi_k$ estamos en condiciones de hacer una primera aproximación, para el sector de onda larga

$$\omega_k^2 = \frac{k^2}{a^2} - \frac{k_0^2}{a^2}\Big|_{IR} \simeq \frac{k_0^2}{a^2}, \tag{1.90}$$

$$\ddot{\xi}_k \cong \frac{k_0^2}{a^2}\,\xi_k. \tag{1.91}$$

Finalmente, recordando que la derivada de la función escalón θ, es la delta de Dirac, tenemos

$$\ddot{\xi}_L - \frac{k_0^2}{a^2}\xi_L = \epsilon\ddot{k}_0\eta + \epsilon\dot{k}_0\lambda + 2\epsilon\dot{k}_0\kappa, \tag{1.92}$$

donde η, λ y κ están dados por

$$\eta = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\,\delta(\epsilon k_0 - k)\left[a_k e^{i\vec{k}\vec{r}}\xi_k + a_k^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r}}\xi_k^*\right], \tag{1.93}$$

$$\lambda = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\dot{\delta}(\epsilon k_0 - k)\left[a_k e^{i\vec{k}\vec{r}}\xi_k + a_k^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r}}\xi_k^*\right], \tag{1.94}$$

$$\kappa = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\,\delta(\epsilon k_0 - k)\left[a_k e^{i\vec{k}\vec{r}}\dot{\xi}_k + a_k^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r}}\dot{\xi}_k^*\right], \tag{1.95}$$

y representan los ruidos.
La ecuación (1.92) es llamada Ecuación Estocástica Cuántica, y describe la evolución de las fluctuaciones cuánticas redefinidas en el sector infrarrojo ($k^2 \ll k_0^2$). Además los ruidos son blancos y gaussianos. Que sean blancos implica que

$$\langle\eta\rangle = \langle\lambda\rangle = \langle\kappa\rangle = 0, \tag{1.96}$$

y que sean gaussianos "sin memoria", implica que sean "delta correlacionados",

$$
\begin{aligned}
\langle \eta(t)\eta(t')\rangle &= \frac{1}{2\pi^2}\frac{\epsilon k_0^2}{\dot{k}_0}\left|\xi_k\right|^2\Big|_{k=\epsilon k_0}\delta(t-t'), & (1.97)\\
\langle \kappa(t)\kappa(t')\rangle &= \frac{1}{2\pi^2}\frac{\epsilon k_0^2}{\dot{k}_0}\left|\dot{\xi}_k\right|^2\Big|_{k=\epsilon k_0}\delta(t-t'). & (1.98)
\end{aligned}
$$

El que hace cuántica esta ecuación estocástica es el ruido κ. Notemos que éste no conmuta con η y λ, como tampoco con χ_L

$$
\begin{aligned}
[\chi_L(\vec{r},t),\kappa(\vec{r},t')] &= \frac{\epsilon^2 k_0^2}{2\pi^2}\,\theta(t-t')\left[\xi_k(t)\dot{\xi}_k^*(t')-\xi_k^*(t)\dot{\xi}_k^*(t')\right]\Big|_{k=\epsilon k_0}, & (1.99)\\
[\eta(\vec{r},t),\kappa(\vec{r},t')] &= \frac{1}{2\pi^2}\frac{\epsilon k_0^2}{\dot{k}_0}\left[\xi_k(t)\dot{\xi}_k^*(t')-\xi_k^*(t)\dot{\xi}_k(t')\right]\Big|_{k=\epsilon k_0}\delta(t-t') & (1.100)
\end{aligned}
$$

Observando los términos de ruido en la ecuación estocástica (1.92), se ve que para que la componente estocástica asociada a κ sea despreciable frente a η, se debe cumplir la condición

$$
\dot{k}_0^2\left\langle \kappa^2\right\rangle \ll \ddot{k}_0^2\left\langle \eta^2\right\rangle. \qquad (1.101)
$$

Así, se puede construir la siguiente ecuación estocástica de segundo orden para el campo de grano grueso,

$$
\ddot{\chi}_L-\frac{k_0^2}{a^2}\chi_L \simeq \epsilon\frac{d}{dt}\left(\dot{k}_0\eta\right). \qquad (1.102)
$$

A partir de esta ecuación podemos construir un sistema de dos ecuaciones estocásticas de primer orden, y así poder escribir una ecuación de Fokker-Planck que nos brinde información acerca de la dinámica de las fluctuaciones. El correspondiente sistema es

$$
\begin{aligned}
\dot{\chi}_L &= u+\epsilon k_0\eta, & (1.103)\\
\dot{u} &= \ddot{\chi}_L-\epsilon\frac{d}{dt}(k_0\eta)=\frac{k_0^2}{a^2}\chi_L, & (1.104)
\end{aligned}
$$

donde se a introducido un campo auxiliar $u=\dot{\chi}_L-\epsilon k_0\eta$. Este sistema formado por dos ecuaciones acopladas con un ruido η blanco y Gaussiano, es conocido como ecuación bidimensional de Langevin.

Ahora se puede escribir una ecuación que describa la dinámica de una distribución de probabilidad. Esta es una ecuación de Fokker-Planck dada por la expresión

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{P}(\vec{x},t|\vec{x}_0,t_0) = \left(-D_i\frac{\partial}{\partial x_i} + D_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right)\mathcal{P}(\vec{x},t|\vec{x}_0,t_0), \tag{1.105}$$

donde el término $D_i = \mathcal{F}_i$, es el término de arrastre y D_{ij} es el término de difusión. La ecuación de Fokker-Planck para nuestro caso particular es

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -u\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \chi_L} - \left(\frac{k_0}{a}\right)^2 \chi_L \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial u} + D_{\chi_L \chi_L}\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \chi_L^2}, \tag{1.106}$$

donde

$$D_{\chi_L \chi_L} = \frac{\epsilon^3 k_0^2 \dot{k}_0}{4\pi^2}\left|\xi_{\epsilon k_0}\right|^2, \tag{1.107}$$

es el coeficiente de difusión debido al ruido η.

Chapter 2

Clasificación de las perturbaciones

El primer paso en el análisis de las perturbaciones de las métrica es clasificarlas de acuerdo a sus propiedades de transformación frente a rotaciones espaciales. La métrica de FRW describe un universo espacialmente isotrópico y homogéneo. Para un modelo de universo más realista debemos incluir las perturbaciones. Así el elemento de línea completo, será representado por

$$dS^2 =^{(0)} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \delta g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{2.1}$$

donde $\delta g_{\mu\nu}$ describe la perturbación respecto de la métrica de fondo denotada por ${}^{(0)}g_{\mu\nu}$. La métrica completa se escribirá entonces como la métrica de fondo más un término de perturbaciones

$$g_{\mu\nu} =^{(0)} g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

tal que debido a la simetría del tensor métrico ambas divergencias coinciden y son nulas

$$g^{\mu\nu}{}_{;\mu} = g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{2.3}$$

Las perturbaciones de la métrica pueden ser categorizadas en tres difernetes tipos, perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales. Esta clasificación se refiere a la forma en que los campos desde $\delta_{\mu\nu}$ son construídos bajo transformaciones de las coordenadas del espacio sobre la hipersuperficie a tiempo constante.

Las perturbaciones escalares pueden producir inhomogeneidades tales que tienen un efecto importante en la dinámica de la materia. Las perturbaciones vectoriales decaen cinemáticamente en un universo en expansión y las perturbaciones tensoriales conducen a las ondas gravitacionales.

Para la siguiente clasificación resulta útil introducir el concepto de tiempo conforme τ [14], el cuál se define como

$$d\tau = \frac{dt}{a}. \tag{2.4}$$

Utilizando el tiempo conforme, la métrica de FRW se puede escribir como

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[d\tau^2 - \frac{1}{1-kr^2}dr^2\right], \tag{2.5}$$

donde $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Además, $dx^2 = dy^2 = dz^2$, debido a la isotropía del universo y k es la curvatura espacial ($k = 0, \pm 1$) para universo plano, cerrado o abierto respectivamente. La razón por la cuál τ se denomina tiempo conforme surge de la ecuación (2.5), en donde se nota que el elemento de línea de la métrica de FRW es conforme con el elemento de línea de Minkowski que describe una hipersuperficie estática en 4 dimensiones. Cualquier función $f(t)$ satisface

$$\dot{f}(t) = \frac{f'(\tau)}{a(\tau)}, \tag{2.6}$$

$$\ddot{f}(t) = \frac{f''(\tau)}{a^2(\tau)} - \mathcal{H}\frac{f'(\tau)}{a^2(\tau)}, \tag{2.7}$$

en donde el primado indica derivada respecto del tiempo conforme τ y $\mathcal{H}$ es el parámetro de Hubble definido respecto de τ

$$\mathcal{H} = \frac{a'(\tau)}{a(\tau)}. \tag{2.8}$$

2.1 Perturbaciones escalares

Existen dos formas para que las cantidades escalares puedan introducirse en δg_{ij}. Una es multiplicando el tensor δ_{ij} con un escalar y la otra es tomando la derivada covariante de una función escalar, siendo la derivada

covariante con respecto a la métrica de fondo δ_{ij} de la hipersuperficie.
En un universo plano ($R = 0$), estas derivadas covariantes se transforman en derivadas ordinarias, denotadas por una coma con su correspondiente índice.

Para completar la especificación de la métrica son necesarias dos funciones más. La primera da δg_{00}, mientras que la derivada covariante de la otra da δg_{10}. La forma más general de la perturbación escalar de la métrica se contruye utizando cuatro cantidades escalares: φ, ψ, E, B las cuales son funciones espacio temporales.
Entonces la perturbación escalar queda

$$\delta g_{\mu\nu}^{(s)} = a^2(\tau) \begin{pmatrix} 2\varphi & -B_{;i} \\ & \\ -B_{;i} & 2\psi\delta_{ij} - \mathcal{D}_{ij}E \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

donde τ es el tiempo conforme y nuevamente al tratarse de funciones escalares, las derivadas covariantes son equivalentes a las derivadas ordinarias. Además, $\mathcal{D}_{ij}E = E_{,ij}$. El elemento de línea queda de la forma

$$dS^2 = a^2(1 + 2\varphi)d\tau^2 - 2B_{,i}dx^i d\tau - [(1 - 2\varphi)\delta_{ij} + \mathcal{D}_{ij}E]\, dx^i dx^j. \tag{2.10}$$

2.2 Perturbaciones vectoriales

Las perturabaciones vectoriales son construídas usando dos vectores S_i y F_i que satisfacen la contracción

$$S^i{}_{;i} = F^i{}_{;i} = 0. \tag{2.11}$$

Las contracciones anteriores son neceasrias y pueden ser vistas de la siguiente forma, si la divergencia de cada vector no es nula, podemos separar en un término sin divergencia y otro con el gradiente de un escalar. Esta consideración conduce a la siguiente perturbación vectorial de la métrica

$$\delta g_{\mu\nu}^{(v)} = a^2(\tau) \begin{pmatrix} 0 & -S_i \\ & \\ -S_i & F_{i;j} + F_{j;i} \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Como habíamos mensionado anteriormente, éstas decaen cinemáticamente en un universo en expansión.

2.3 Perturbaciones tensoriales

Las perturbaciones tensoriales se contruyen usando un tensor simétrico h_{ij} que satisface las contracciones

$$h^i{}_i = 0 \qquad h^{ij}{}_{;j} = 0. \tag{2.13}$$

Estas contracciones son importantes ya que h_{ij} no contiene componentes que transformen como escalares o vectores. Así, la métrica para la perturbación tensorial es

$$\delta g^{(t)}_{\mu\nu} = a^2(\tau) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

En una aproximación lineal las pertubaciones escalares, vectoriales y tensoriales evolucionan independientemente y así pueden considerarse en forma independiente.

Las perturbaciones tensoriales de la métrica, a primer orden, son las ondas gravitacionales y éstas no se acoplan a la densidad de energía ni homogeneidades de presión y por lo tanto no contribuyen a la inestabilidad gravitacional.

Sin embargo, las ondas gravitacionales son de interés en sí mismas como una especificación de la signatura de la métrica en las teorías de gravedad.

La teoría clásica de la evolución de las ondas gravitacionales en un espacio-tiempo de fondo en expansión fué analizada en algunos artículos básicos sobre perturbaciones cosmológicas (citar [3,5] de Mukhanov)..Así, los gravitones pueden producidos en un universo en expansión.

Chapter 3

Ondas gravitacionales en 4D

La relatividad general y la electrodinámica manifiestan profundas similitudes y diferencias fundamentales. En forma muy similar a la teoría electromagnética, en relatividad general las ecuaciones de Einstein no sólo describen la interacción gravitacional a través de la curvatura del espacio-tiempo generada por la masa y la energía, sino que también predice la existencia de perturbaciones de la curvatura propagándose con velocidad c en el espacio-tiempo plano y vacío: Las Ondas Gravitacionales.

3.1 Teoría y experimentos

La teoría linealizada de las ondas gravitacionales tiene sus limitaciones, por que la aproximación lineal no es válida para fuentes donde los campos son intensos. En 1941 Landau and Lifshitz describieron la emisión de ondas gravitacionales por un sistema auto-gravitante de cuerpos moviéndose lentamente. Sin embargo, en los años siguientes hubieron serios debates acerca de la realidad de las ondas gravitacionales hasta que en 1957, Hermann Bondi mostró por medio de un experimento ideal que las ondas gravitacionales en verdad transportan energía.

En 1960 Joseph Weber comenzó un trabajo experimental para detectar las ondas gravitacionales. Entonces, los trabajos teóricos de Wheeler, Bondi, Landau and Lifshitz, y el trabajo experimental de Weber, entre otros, abría una nueva era de búsqueda en este campo.

Hoy las ondas gravitacionales, tanto en la teoría como en los experimentos, es uno de los temas de mayor importancia, en relatividad general y gravitación.

En la misma forma que las ondas electromagnéticas, tanto el espectro visible, como las ondas de radio, el espectro infrarrojo y ultravioleta, los rayos-X y los rayos gamma, abrieron una nueva ventana y provocaron cambios radicales en el universo conocido, se espera que las ondas gravitacionales provoquen una revolución en nuestro conocimiento del universo debido a la observación de nuevos fenómenos tales como la formación y colisión de agujeros negros, el decaimiento de estrellas en agujeros negros supermasivos, las primeras ondas gravitacionales emitidas justo después de Big Bang, etc. Sin embargo, hoy, la sola evidencia para su actual existencia es indirecta y proviene de la observación de la pérdida de energía de un sistema pulsar binario, descubierto en 1974 por Hulse and Taylor.

Junto con el enorme esfuerzo por detectar las ondas gravitacionales, desde detectores de interferómetros laser en la tierra GEO-600, LIGO, VIRGO, e interferómetros laser en el espacio, LISA (Laser Interferometer Space Antenna), existen grandes chances para la detección de estas ondas en el futuro. Esto está fuertemente ligado al trabajo teórico y computacional para entender y predecir la emisión, desde sistemas astrofísicos en condiciones de campos fuertes.

3.2 Detectores de ondas gravitacionales

La radiación gravitacional es una predicción central de la relatividad general y su detección es la prueba de la integridad de la estructura teórica del trabajo de Einstein. Sin embargo, su importancia como una herramienta para la astronomía observacional es probable que sea aún mayor. Tenemos una excelente evidencia observacional desde el sistema pulsar binario Hulse-Taylor, que las predicciones de relatividad general acerca de la radiación gravitacional, son cuantitativamente correctas. Sin embargo existe información incompleta desde la astronomía actual acerca de fuentes prometedoras de radiación detectable.

Las ondas gravitacionales transportan información que no transporta la radiación electromagnética. Estas son generadas por cuerpos masivos en movimiento que codifican la distribución de masas y velocidades. Existe coherencia y su baja frecuencia refleja la escala temporal dinámica de sus fuentes.

Para apreciar las ondas electromagnéticas podemos hacer interferencia sobre esta estructura sólo a través de un cuidadoso modelado de su fuente. En contraste, las ondas gravitacionales transportan información que conecta equitativamente la estructura de la fuente y el movimiento.

La historia de la detección de las ondas gravitacionales comienza en 1960 con J.Weber en la Universidad de Maryland. Él construyó el primer detector barra: éste era un cilindro de aluminio ($\sim 2 \times 10^3 Kg$) operando a temperatura ambiente ($300K$) con una frecuencia de resonancia cercana a los $1600Hz$. Este primer prototipo tuvo una sensibilidad del orden de 10^{-13} o 10^{-14}.

A pesar de esta pobre sensibilidad, en los años siguientes Weber anunció la detección de una serie de eventos coincidentes entre barras similares suficientemente alejadas como para esperar que el ruido provenga del instrumental. Estas noticias estimularon a un gran número de grupos a construir y desarrollar detectores barras, a fin de comprobar los resultados de Weber. Desafortunadamente para Weber, ninguno de estos otros detectores pudo hallar algo. Sin embargo este fallo le confirmó a Weber el verdadero sentido de la relatividad general, ya que los cálculos teóricos nunca predijeron que señales razonables fueran suficientemente fuertes como para ser detectadas por las barras de Weber.

Desde 1980 a 1994, se han desarrollaron detectores de dos clases diferentes:

- Detectores barra cilíndricos: Los mejores de éstos detectores están por debajo de 10^{-19} de sensibilidad. Sólo algunos detectores continúan operando hoy, y llevan a cabo un número de búsquedas coincidentes, que conducen a altos límites, pero no a detecciones.

- Interferómetros: La sensibilidad típica de éstos prototipos fué de 10^{-18}.

Luego se construyeron detectores interferométricos a gran escala,

- LIGO: Caltech y MIT (NSF) LIGO;

- VIRGO: Francia (CNRS) e Italia (INFN)

- GEO600: Alemania (Max Planck) y UK (PPARC).

El más espectacular, se basa en un detector espacial, LISA, el cual fue adoptado por ESA (European Space Agency) como piedra fundamental para la misión en el siglo XXI. El proyecto está obteniendo un considerable progreso desde el momento en que la NASA colabora con ESA.

3.3 Elementos de ondas gravitacionales

Una de las dificultades que surgen al estudiar ondas gravitacionales a partir de las ecuaciones de Einstein, reside en que éstas son no lineales y por lo tanto no se puede usar el principio de superposición como se hace comúnmente con las ondas. En segundo lugar a diferencia del vector de Poynting para las ondas electromagnéticas, no tenemos una herramienta para transferir la energía gravitacional. La tercer dificultad surge de la covariancia general de las ecuaciones de Einstein, la perturbación puede parecer periódica, pero ¿Estamos seguros que no surge de una elección especial de las coordenadas?
En los útimos años se han realizado considerables progresos para tratar de entender y resolver estos problemas, pero esta búsqueda además mostró que la naturaleza de las ondas gravitacionales es mucho más complicada que la de las ondas electromagnéticas.
Sin embargo es posible desarrollar una teoría de ondas gravitacionales la cuál se ve como un tensor análogo al de ondas vectoriales en la teoría electomagnética. Este formalismo sólo se puede aplicar a campos gravitacionalmente débiles dado que las ecuaciones de movimiento surgen de una aproximación lineal de las ecuaciones de Einstein.
Consideremos una aproximación en el espacio-tiempo plano, donde el tensor métrico se puede escribir como

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}, \tag{3.1}$$

η_{ij} es el tensor métrico en el espacio-tiempo de Minkowski y h_{ij} es una perturbación, donde asumimos $|h_{ij}| \ll 1$.
En el límite de campo débil

$$\begin{aligned} R_{hjlk} &= \frac{1}{2}\left(g_{jl,hk} + g_{hk,jl} - g_{jk,hl} - g_{hl,jk}\right) \\ &- g^{ts}\left([hl,s][jk,t] - [hk,s][jl,t]\right), \end{aligned} \tag{3.2}$$

dado que

$$[ij,k] = g_{rk} \left\{ \begin{array}{c} r \\ ij \end{array} \right\}, \tag{3.3}$$

donde $\left\{ \begin{array}{c} r \\ ij \end{array} \right\}$ son los símbolos de Cristoffel de segunda especie, y entonces

$$\begin{aligned} R_{hjlk} &= \frac{1}{2}\left(g_{jl,hk} + g_{hk,jl} - g_{jk,hl} - g_{hl,jk}\right) \\ &- g^{ts}\left(g_{rs}\left\{ \begin{array}{c} r \\ hl \end{array} \right\} g_{mt}\left\{ \begin{array}{c} m \\ jk \end{array} \right\} - g_{ns}\left\{ \begin{array}{c} n \\ hk \end{array} \right\} g_{mt}\left\{ \begin{array}{c} m \\ jl \end{array} \right\}\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Como

$$g^{ts} g_{rs}\left\{ \begin{array}{c} r \\ hl \end{array} \right\} g_{mt}\left\{ \begin{array}{c} m \\ jk \end{array} \right\} = \delta^{t}{}_{r}\left\{ \begin{array}{c} r \\ hl \end{array} \right\} g_{mt}\left\{ \begin{array}{c} m \\ jk \end{array} \right\} = g_{mt}\left\{ \begin{array}{c} t \\ hl \end{array} \right\}\left\{ \begin{array}{c} m \\ jk \end{array} \right\}, \tag{3.5}$$

y además cada $\left\{ \begin{array}{c} t \\ hl \end{array} \right\} \sim h$, entonces el segundo término de la ecuación (3.4) puede despreciarse ya que resultan ser términos de orden dos. Así tenemos

$$R_{iklm} \simeq -\frac{1}{2}\left(h_{km,il} + h_{il,km} - h_{kl,im} - h_{im,kl}\right). \tag{3.6}$$

Además, requerimos que sean independientes (o invariantes) ante transformaciones de coordenadas. Para ello definimos ciertas condiciones auxiliares,

$$\psi_l^k = h_l^k - \frac{1}{2}\delta_l^k h, \tag{3.7}$$

y la elección de las coordenadas es tal que se cumplan las siguientes 4 ecuaciones

$$\psi_{l,k}^k = 0, \tag{3.8}$$

donde $\psi_k^{l;k} = 0$ es un potencial gravitacional que satisface las ecuaciones de Gauge.
Si elegimos las nuevas coordenadas

$$x'^i = x^i + \xi^i, \qquad \Box \xi^i = 0, \tag{3.9}$$

obtenemos que la ecuación (3.8) se cumple, pero para las coordenadas primadas.

Sabemos que

$$\begin{aligned} R_{ik} &= g^{nm} R_{mikn} \\ &\simeq -\frac{1}{2}\left(h^m{}_{i,mk} + h^n{}_{k,in} - h_{,ik} - \Box h_{ik}\right), \end{aligned} \tag{3.10}$$

y por otro lado, de (3.8), tenemos

$$\psi^k{}_{l,k} = h^k{}_{l,k} - \frac{1}{2}\delta^k{}_l h_{,l} = 0, \tag{3.11}$$

entonces

$$\begin{aligned} h^m{}_{i,mk} &= \frac{1}{2}\delta^m{}_i h_{,mk} = \frac{1}{2}h_{,ik}, \\ h^n{}_{k,in} &= \frac{1}{2}\delta^n{}_k h_{,ni} = \frac{1}{2}h_{,ki}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Reemplazando estos resultados en (3.10), obtenemos

$$R_{ik} \simeq \frac{1}{2}\Box h_{ik}, \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{2}\Box h. \tag{3.13}$$

Como $G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2}\eta_{ik}R$, entonces resulta

$$G_{ik} \simeq \frac{1}{2}\Box\psi_{ik}, \tag{3.14}$$

donde el operador $\Box$ es el d'Alambertiano en la métrica Minkowski y así las ecuaciones de Einstein quedan

$$\Box\psi_{ik} = -16\pi G T_{ik}, \tag{3.15}$$

cuya solución formal para una distribución de materia-energía en un volumen $\mathcal{V}$ es

$$\psi_{ik}(\vec{r}, t) = -4G \int_{\mathcal{V}} \frac{T_{ik}(\vec{R}, t - |\vec{r} - \vec{R}|)}{|\vec{r} - \vec{R}|} d^3\vec{R}. \tag{3.16}$$

Chapter 4

Ondas gravitacionales durante inflación desde una teoría de vacío en 5D

4.1

Las ondas gravitacionales han sido objeto de atención desde hace largo tiempo [17]. Bajo el Modelo Cosmológico Estándar y la Teoría de Inflación, es muy natural predecir la existencia de ondas gravitacionales de fondo [18]. Entre las primeras perturbaciones generadas durante inflación, las más relevantes fueron las componentes escalares y tensoriales. Las primeras fueron las semillas de las estructuras a gran escala, las cuales han formado gradualmente la estructura en gran escala en el universo, y son puestas a prueba en las observaciones actuales de las microondas cósmicas de fondo (CMB). Las perturbaciones tensoriales han escapado del horizonte durante inflación, y se conservan como vestigios de las ondas gravitacionales de fondo, las cuales traen información del universo muy temprano. En este sentido, las perturbaciones tensoriales son muy significativas para el estudio del universo temprano. Su amplitud está relacionada a la escala de energía de inflación y son potencialmente detectables a través de osbservaciones de polarización de "B-modo" en las microondas cósmicas de fondo, si la escala de energía de inflación es del orden de $\sim 3\times 10^{15}$ GeV [19, 20, 21, 22] . Tales detecciones serán importantes para testear inflación. La detección directa de las ondas gravitacionales (GW) es uno de los objetivos científicos más importantes ya que mejoraría nuestro entendimiento de las leyes que gobiernan el universo temprano. También proveerían de nuevos significados a lo observado. Los detectores más sensibles, que ya están operando, en construcción o siendo planeados, están basados en interferómetros ópticos [23]. En particular, las ondas gravitacionales serán medidas en el futuro por el satélite Planck, el cual está diseñado para producir mapas de polarización y temperatura de alta resolución de CMB. El mecanismo elemental de generación de las ondas gravitacionales primitivas ha sido discutido en [25]. Hay dos formalismos principales en 4D desarrollados en la literatura; el de Bardeen [26] y el formalismo covariante [27].

La idea de que nuestro universo es un espacio-tiempo de 4D embebido en altas dimensiones ha sido un tema de gran interés en varias ramas de la física, en particular en cosmología. En los últimos años las teorías en las cuales se considera sólo una dimensión extra se han hecho bastante populares en la comunidad científica. Entre estas teorías están los escenarios de mundos brana [28], la teoría de Espacio-Tiempo-Materia (STM) [29] y todas las teorías de Kaluza-Klein no compactas.

En este trabajo se estudia la evolución de las ondas gravitacionales en el universo temprano, cuya evolución esta gobernada por un parámetro cosmológico (que decae con el tiempo) $\Lambda(t)$, desde un estado de vacío en 5D definido sobre un espacio-tiempo Riemann plano $4+1$. El parámetro cosmológico decreciente puede ser introducido de manera geométrica a través de un elemento de línea de fondo [30]

$$dS_b^2 = \psi^2 \frac{\Lambda(t)}{3} dt^2 - \psi^2 e^{2\int \sqrt{\Lambda/3}\, dt} dr^2 - d\psi^2, \tag{4.1}$$

donde $dr^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$, siendo $\{x^i\} = \{x, y, z\}$ las coordenadas cartesianas locales. Además t y ψ son las coordenadas tiempo y espacio locales respectivamente. Adoptando un sistema de unidades natural ($\hbar = c = 1$), la quinta coordenada ψ tiene unidades espaciales, mientras que el parámetro cosmológico $\Lambda(t)$ tiene unidades de $(longitud)^{(-2)}$. La métrica de fondo en (4.1) es Riemann-plana, $R^A{}_{BCD} = 0$, y describe perfectamente un vacío geométrico en 5D.

La aproximación usual consiste en considerar una perturbación tensorial del elemento de línea obtenido desde (4.1)

$$dS^2 = \psi^2 \frac{\Lambda(t)}{3} dt^2 - \psi^2 e^{2\int \sqrt{\Lambda/3}\,dt} (\delta_{ij} + Q_{ij}) dx^i dx^j - d\psi^2, \tag{4.2}$$

siendo $Q_{ij}(t, \vec{r}, \psi)$ el tensor de traza nula transversal que denota las fluctuaciones tensoriales con respecto a la métrica de fondo (4.1), y de este modo satisface $tr(Q_{ij}) = Q^i{}_j = 0$ y $Q^{ij}_{;i} = 0$. Las componentes espaciales en 3D de la métrica (4.2) pueden ser escritas como $g_{ij} = -\psi^2 \mathrm{exp}\left[2\int \sqrt{\Lambda/3}\,dt\right] (\delta_{ij} + Q_{ij})$ y por lo tanto las componentes contravariantes pueden ser aproximadas linealmente por $g^{ij} \simeq -\psi^{-2} \mathrm{exp}\left[-2\int \sqrt{\Lambda/3}\,dt\right] (\delta^{ij} - Q^{ij})$.

Bajo esta aproximación la dinámica obedecida por las fluctuaciones tensoriales Q_{ij}, se obtiene usando las ecuaciones de Einstein linealizadas en 5D en un vacío aparente $\delta R_{AB} = 0$. No obstante, como es bien sabido solamente las componentes espacio-espacio contribuyen a las fluctuaciones tensoriales. Entonces la expresión se reduce simplemente a

$$\delta R_{ij} = 0. \tag{4.3}$$

Entonces, luego de algún álgebra, obtenemos la dinámica de las fluctuaciones tensoriales Q_{ij}, determiada por

$$\ddot{Q}_{ij} + \left[3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{1}{2}\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right] \dot{Q}_{ij} - \frac{\Lambda}{3}\, e^{-2\int \sqrt{\Lambda/3}\,dt} \nabla_r^2 Q_{ij} - \frac{\Lambda}{3}\left[4\psi Q_{ij,\psi} + \psi^2 Q_{ij,\psi,\psi}\right] = 0, \tag{4.4}$$

donde $(,)$ denota derivada parcial mientras que el punto denota derivación ordinaria con respecto al tiempo cósmico t.

4.2 Modos del tensor en 5D

Consideremos ahora una aproximación diferente, la cual, nos da la dinámica (4.4), pero desde la acción $I = -\int d^4x\, d\psi\ {}^{(5)}L$, dada por el Lagrangiano gravitacional de fondo, más el campo tesorial libre, Q_{ij} (los índices A y B corren desde 0 hasta 4 y los índices i y j desde 1 hasta 3)

$$^{(5)}L = \sqrt{\left|\frac{^{(5)}g}{^{(5)}g_0}\right|} \left[\frac{^{(5)}\mathcal{R}}{16\pi G} + \frac{M_p^2}{2} g^{AB} Q^{ij}_{;A} Q_{ij;B}\right], \tag{4.5}$$

siendo $(;)$ la derivada covariante. Además, ${}^{(5)}\mathcal{R}=0$ es el escalar de Ricci de fondo en 5D y ${}^{(5)}g=\psi^{(8)}\Lambda e^{6\int\sqrt{\Lambda/3}dt}/3$ es el determinante del tensor métrico covariante de fondo g_{AB}. Siguiendo con el proceso usual de cuantización para $Q_{ij}(t,\vec{r},\psi)$, necesitamos que se cumpla la siguiente relación de conmutación

$$\begin{aligned}\left[Q_{ij}(t,\vec{r},\psi),\frac{\partial L\left(Q_{ij},Q_{ij;k}\right)}{\partial Q_{ls;t}}(t,\vec{r'},\psi)\right] &= i\delta^l_i\,\delta^s_j\,g^{tt}M_p^2\sqrt{\left|\frac{{}^{(5)}g}{{}^{(5)}g_0}\right|}\left(\frac{\psi_0}{\psi}\right)^3 e^{-\int\left[3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}-\frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda}\right]dt}\\ &\times\;\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r'}).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Por otro lado, ${}^{(5)}g_0\equiv{}^{(5)}g[\psi=\psi_0,\Lambda_0\equiv\Lambda(t=t_0)]$, siendo ψ_0 y t_0 constantes a ser especificadas. Ahora es interesante estudiar la dinámica de Q_{ij}. Expresamos las funciones Q_{ij} como la expansión de Fourier en la forma

$$\begin{aligned}Q^i{}_j(t,\vec{r},\psi) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k_r\sum_\alpha{}^{(\alpha)}e^i{}_j\left[e^{i\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\zeta^{(\alpha)}_{k_r}(t,\psi)\right.\\ &+\left. e^{-i\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\left(\zeta^{(\alpha)}_{k_r}(t,\psi)\right)^*\right],\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde α cuenta el número de grados de libertad de polarización, el asterisco $(*)$ denota conjugación compleja. El tensor polarización ${}^{(\alpha)}e_{ij}$ obedece

$${}^{(\alpha)}e_{ij}={}^{(\alpha)}e_{ji},\quad {}^{(\alpha)}e_{ii}=0,\quad k^{i\,(\alpha)}e_{ij}=0,\quad {}^{(\alpha)}e_{ij}(-\vec{k}_r)={}^{(\alpha)}e^*_{ij}(\vec{k}_r). \tag{4.8}$$

Introduciendo (4.7) en (4.4) obtenemos la dinámica de los modos tensoriales en 5D $\zeta_{k_r}(t,\psi)$, que está dada por

$$\ddot{\zeta}_{k_r}+\left[3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}-\frac{1}{2}\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right]\dot{\zeta}_{k_r}+\left[\frac{\Lambda}{3}k_r^2\,e^{-2\int\sqrt{\Lambda/3}\,dt}-\frac{\Lambda}{3}\left(4\psi\frac{\partial}{\partial\psi}+\psi^2\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right)\right]\zeta_{k_r}=0. \tag{4.9}$$

Descomponemos los modos del tensor $\zeta_{k_r}(t,\psi)$ en los modos de Kaluza-Klein haciendo separación de variables

$$\zeta^{(\alpha)}_{k_r}(t,\psi)=a^{(\alpha)}_{k_r}\int dm\,\xi_{k_r}(t,m)\Theta_m(\psi), \tag{4.10}$$

donde los operadores de creación $a^{(\alpha)\,\dagger}_{k_r}$ y de aniquilación $a^{(\alpha)}_{k_r}$, satisfacen el álgebra

$$\left[a^{(\alpha)}_{k_r},a^{(\alpha')\,\dagger}_{k'_r}\right]=g^{\alpha\alpha'}\delta^{(3)}(\vec{k}_r-\vec{k}'_r),\qquad \left[a^{(\alpha)}_{k_r},a^{(\alpha')}_{k'_r}\right]=\left[a^{(\alpha)\,\dagger}_{k_r},a^{(\alpha')\,\dagger}_{k'_r}\right]=0. \tag{4.11}$$

Reemplazando en la ecuación (4.9) obtenemos

$$\ddot{\xi}_{k_r} + \left(3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{1}{2}\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right)\dot{\xi}_{k_r} + \left[\frac{\Lambda}{3}\, e^{-2\int \sqrt{\Lambda/3}\, dt} k_r^2 + m^2\frac{\Lambda}{3}\right]\xi_{k_r} = 0, \quad (4.12)$$

$$\psi^2 \frac{d^2\Theta_m}{d\psi^2} + 4\psi\frac{d\Theta_m}{d\psi} + m^2\Theta_m = 0, \quad (4.13)$$

donde el parámetro m^2 es la constante que surge de hacer separación de variables y está relacionada con el cuadrado de la masa-KK medida por una clase de observadores en 5D. Usando la transformación $\xi_{k_r} = e^{-(1/2)\int (3\sqrt{\Lambda/3}-(\dot{\Lambda}/2\Lambda))dt}\, \chi_{k_r}(t)$ y $\Theta_m(z) = e^{-3/2z}\, L_m(z)$, con $z = \ln(\psi/\psi_0)$, en las ecuaciones (4.12) y (4.13), respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned}\ddot{\chi}_{k_r} &+ \left[\frac{\Lambda}{3} e^{-2\int \sqrt{\Lambda/3}\, dt} k_r^2 - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\dot{\Lambda} + \frac{1}{4}\frac{\ddot{\Lambda}}{\Lambda} - \frac{5}{16}\frac{\dot{\Lambda}^2}{\Lambda^2} + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right. \\ &+ \left.\left(\frac{m^2}{3} - \frac{3}{4}\right)\Lambda\right]\chi_{k_r} = 0, \quad (4.14)\\ \frac{d^2 L_m(z)}{dz^2} &+ \left[m^2 - \frac{9}{4}\right] L_m(z) = 0. \quad (4.15)\end{aligned}$$

De esta forma, dado el parámetro cosmológico $\Lambda(t)$, la evolución temporal de los modos del tensor $\xi_{k_r}(t)$ en 5D está determinada por las soluciones de (4.14) y (4.15). Una vez que es obtenida una solución para $\xi_{k_r}(t)$, debería satisfacer el álgebra dada por la ecuación (4.6). Esto se puede garantizar si tal solución obedece

$$\int d^3k_r \left\langle 0 \left| \left[\zeta_{k_r}^{(\alpha)} \left(\dot{\zeta}_{k_r}^{(\alpha)}\right)^* - \dot{\zeta}_{k_r}^{(\alpha)} \left(\zeta_{k_r}^{(\alpha)}\right)^*\right]\right| 0\right\rangle = i\, e^{-\int (3\sqrt{\Lambda/3}-(\dot{\Lambda}/2\Lambda))dt}. \quad (4.16)$$

Por otro lado, vemos que la ecuación (4.13) es exactamente la misma que la obtenida en [31]. Por lo tanto, acerca del comportamiento de los modos con respecto a la quinta coordenada, podemos decir que para $m > 3/2$ los modos-KK son coherentes en el sector ultra violeta (UV), descripto por

$$k_r^2 > \left\{\frac{3}{2\Lambda}\frac{d}{dt}\left[3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda}\right] - \frac{3}{4\Lambda}\left(3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda}\right)^2 - m^2\right\} e^{2\int \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} dt} > 0. \quad (4.17)$$

Sin embargo, para $m < 3/2$ aquellos modos son inestables y divergen al infinito. Los modos $m > 3/2$ cumplen con las condiciones (4.16) y entonces son normalizables.

4.3 Dinámica efectiva en 4D

Para describir la dinámica en 4D podemos hacer una foliación $\psi = \psi_0$ sobre el elemento de línea (4.1), tal que la métrica de fondo efectiva en 4D: $dS^2|_{eff} = ds^2$, es

$$ds^2 = \psi_0^2 \frac{\Lambda(t)}{3} dt^2 - \psi_0^2 e^{2\int \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} dt} dr^2. \tag{4.18}$$

En esta sección estudiaremos la dinámica del tensor de fluctuaciones 4D $h_{ij}(t, \vec{r}) \equiv Q_{ij}(t, \vec{r}, \psi = \psi_0)$, haciendo énfasis sobre aquellos modos con longitudes de onda mucho mayor al horizonte observable que describe este campo sobre escalas cosmológicas. La acción efectiva en 4D, ${}^{(4)}I$, es (α y β corren desde 0 hasta 3)

$${}^{(4)}I = -\int d^4x \sqrt{\left|\frac{{}^{(4)}g}{{}^{(4)}g_0}\right|} \left[\frac{{}^{(4)}\mathcal{R}}{16\pi G} + \frac{M_p^2}{2} g^{\alpha\beta} Q^{ij}_{;\alpha} Q_{ij;\beta}\right]\Bigg|_{\psi=\psi_0}, \tag{4.19}$$

donde ${}^{(4)}\mathcal{R} = 12/\psi_0^2$ es el escalar de Ricci en 4D evaluado en la métrica (4.18), tal que obtenemos una ecuación de estado que describe un vacío efectivo en 4D: $p = -\rho$, siendo p y ρ la presión y la densidad de energía, respectivamente.

La ecuación de movimiento para el tensor de fluctuaciones en 4D es

$$\ddot{h}^i_j + \left[3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda}\right] \dot{h}^i_j - \frac{\Lambda}{3} e^{-2\int \frac{\Lambda}{3} dt} \nabla_r^2 h^i_j - \frac{\Lambda}{3}\left[\frac{4}{\psi}\frac{\partial Q^i_j}{\partial \psi} + \psi^2 \frac{\partial^2 Q^i_j}{\partial \psi^2}\right]\Bigg|_{\psi=\psi_0} = 0. \tag{4.20}$$

Usando la eq. (4.13), obtenemos

$$\ddot{h}^i_j + \left[3\frac{\Lambda}{3} - \frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda}\right] \dot{h}^i_j - \frac{\Lambda}{3} e^{-2\int \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} dt} \nabla_r^2 h^i_j + \frac{m^2\Lambda}{3} h^i_j = 0. \tag{4.21}$$

Luego, hacemos la transformación $h^i_j(t,\vec{r}) = e^{-1/2\int\left[3\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2}-\frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda}\right]dt}\chi^i_j(t,\vec{r})$, y obtenemos

$$\ddot{\chi}^i_j - \frac{\Lambda}{3}e^{-2\int\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}dt}\nabla^2_r\chi^i_j - \left[\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\dot{\Lambda} + \frac{1}{4}\frac{\ddot{\Lambda}}{\Lambda} - \frac{5}{16}\frac{\dot{\Lambda}^2}{\Lambda^2} + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left(\frac{m^2}{3} - \frac{3}{4}\right)\Lambda\right]\chi^i_j = 0, \tag{4.22}$$

tal que sea posible hacer una expansión en Fourier para χ^i_j

$$\begin{aligned} \chi^i{}_j(t,\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k_r \sum_{\alpha=1,2} {}^{(\alpha)}e^i_j \left[e^{i\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\chi^{(\alpha)}_{k_r}(t,\psi_0)\right. \\ &+ \left. e^{-i\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\left(\chi^{(\alpha)}_{k_r}(t,\psi_0)\right)^*\right], \end{aligned} \tag{4.23}$$

donde exigimos que los modos χ_{k_r} satisfagan la relación de conmutación

$$\left[\chi_{k_r}(t,\vec{r}), \dot{\chi}_{k_r}(t,\vec{r'})\right] = i\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r'}). \tag{4.24}$$

Usando (4.23) esta expresión se lee

$$\chi_{k_r}\dot{\chi}^*_{k_r} - \chi^*_{k_r}\dot{\chi}_{k_r} = i, \tag{4.25}$$

la cual es la condición para que los modos sean normalizables en el sector-UV. Introduciendo (4.23) en (4.22) obtenemos la ecuación dinámica para los modos-k_r

$$\ddot{\chi}_{k_r} + \left[\frac{\Lambda}{3}e^{-2\int\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}dt}k^2_r - \left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\dot{\Lambda} + \frac{1}{4}\frac{\ddot{\Lambda}}{\Lambda} - \frac{5}{16}\frac{\dot{\Lambda}^2}{\Lambda^2} + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left(\frac{m^2}{3} - \frac{3}{4}\right)\Lambda\right)\right]\chi_{k_r} = 0. \tag{4.26}$$

De esta forma para un dado $\Lambda(t)$ corresponde una solución normalizada, para los modos resueltos de la eq. (4.26). Una vez obtenida la solución normalizada de (4.26), seremos capaces de relacionarla con el espectro en escalas mucho mayores al horizonte observable. La amplitud de las fluctuaciones tensoriales en la métrica en 4D $< h^2 >=< 0|h^i{}_j h^j{}_i|0 >$ en el sector-IR está dado por

$$\left\langle h^2\right\rangle\big|_{IR} = \frac{4}{\pi^2}e^{-\int\left[3\left(\frac{\Lambda}{3}\right)^{1/2}-\frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda}\right]dt}\int_0^{\epsilon k_H}\frac{dk_r}{k_r}k^3_r\left[\chi_{k_r}(t)\chi^*_{k_r}(t)\right]_{IR}, \tag{4.27}$$

donde $\epsilon = k^{IR}_{max}/k_p \ll 1$ es un parámetro adimensional, siendo $k^{IR}_{max} = k_H(t_i)$ el número de onda relacionado al radio de Hubble al tiempo t_i. Este tiempo corresponde al tiempo cuando los modos gravitacionales re ingresan al horizonte. En adición, k_p es el número de onda de Planck. Claramente, para obtener un espectro explícito es necesario especificar primero una forma funcional para $\Lambda(t)$. Algunos ejemplos ilustrativos serán estudiados en la siguiente sección.

4.4 Ejemplos

A fin de ilustrar el formalismo desarrollado en la sección anterior, a lo largo de esta sección, estudiaremos un par de ejemplos interesantes. El primero contempla un parámetro cosmológico constante $\Lambda = 3H_0^2$, y en el segundo consideramos $\Lambda(t) = 3p^2/t^2$ (con $p > 0$).

4.4.1 Caso $\Lambda = 3H_0^2$

Este ejemplo simple resulta de tomar el parámetro cosmológico Λ como una constante, en particular $\Lambda = 3H_0^2$. En este caso particular la ecuación de movimiento para los modos χ_{k_r} esta dada por

$$\ddot{\chi}_{k_r} + \left[H_0^2 e^{-2H_0 t} k_r^2 - \left(m^2 - \frac{9}{4}\right) H_0^2\right] \chi_{k_r} = 0. \tag{4.28}$$

La solución general para esta ecuación es

$$\chi_{k_r}(t) = A_1 \mathcal{H}_\nu^{(1)}\left[k_r e^{-H_0 t}\right] + A_2 \mathcal{H}_\nu^{(2)}\left[k_r e^{-H_0 t}\right], \tag{4.29}$$

donde A_1 y A_2 son constantes de integración. Luego de aplicar la normalización de Bunch-Davies [33] la solución normalizada será

$$\chi_{k_r}(t) = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{H_0}} \mathcal{H}_\nu^{(2)}\left[k_r e^{-H_0 t}\right], \tag{4.30}$$

con $\nu = (1/2)\sqrt{4m^2 - 9}$. Esta solución es estable para $m^2 > 9/4$, en escalas $k_r^2 > \left(m^2 - \frac{9}{4}\right) e^{2H_0 t} > 0$. Ahora, consideremos la expansiíon asintótica para la función de Hankel $\mathcal{H}_\nu^{(2)}[y] \simeq (-i/\pi)\Gamma(\nu)[y/2]^{-\nu}$ en (4.30). La amplitud de las fluctuaciones tensoriales en la métrica en 4D (4.27) en escalas cosmológicas (mayores al horizonte Hubble), está dada por

$$\left\langle h^2 \right\rangle_{IR} = \frac{2^{2\nu}}{\pi^3(3-2\nu)} \frac{\Gamma^2(\nu)}{H_0} e^{-(3-2\nu)H_0 t} \epsilon^{3-2\nu} k_H^{3-2\nu}, \tag{4.31}$$

donde $k_H(t) \sim e^{H_0 t}$. Por consiguiente, el espectro gravitacional $\mathcal{P}_g(k_r)$ toma la forma

$$\mathcal{P}_g(k_r) = \frac{2^{2\nu}}{\pi^3} \frac{\Gamma^2(\nu)}{H_0} \, e^{-(3-2\nu)H_0 t} k_r^{3-2\nu} \big|_{k_r = \epsilon k_H} . \tag{4.32}$$

Podemos ver desde (4.32) que para $m \simeq 3/\sqrt{2} > (3/2)$, el espectro gravitacional $\mathcal{P}_\nu(k_r)$ es cercano al invariante de escala y consecuentemente el índice espectral del tensor en este caso se convierte en $n_T \equiv 3 - 2\nu \simeq 0$.

4.4.2 Caso $\Lambda = 3p^2/t^2$

Otro caso interesante surge de considerar al parámetro cosmloógico decreciente $\Lambda = 3p^2/t^2$, con la restricción $\dot{\Lambda} < 0$. En este caso, la ecuación de movimiento para los modos $\chi_{k_r}(t)$ resulta ser

$$\ddot{\chi}_{k_r} + \left\{ k_r^2 p^2 t_0^{2p} t^{-2(p+1)} - \left[\left(m^2 - \frac{9}{4} \right) p^2 - \frac{9}{4} p + \frac{1}{4} \right] t^{-2} \right\} \chi_{k_r} = 0, \tag{4.33}$$

donde $M^2(t) = \left[\left(m^2 - \frac{9}{4} \right) p^2 - \frac{9}{4} p + \frac{1}{4} \right] t^{-2}$ puede ser interpretado como un término al cuadrado de masa efectiva. Los valores permitidos para m serán

$$\frac{9}{4} < m^2 \leq \frac{9}{4} \left(\frac{9}{4} + 1 \right) \tag{4.34}$$

para los

$$\frac{9 - \sqrt{117 - 16m^2}}{2(4m^2 - 9)} \leq p \leq \frac{9 + \sqrt{117 - 16m^2}}{2(4m^2 - 9)}. \tag{4.35}$$

La solución general de (4.33) puede ser expresada en términos de funciones de Bessel como

$$\begin{aligned} \chi_{k_r}(t) &= B_1 \left[\frac{y(t)}{2} \right]^{-\mu/(2p)} t^{(1-\mu)/2} \Gamma \left(1 + \frac{\mu}{2p} \right) \mathcal{J}_\mu[y(t)] \\ &+ B_2 \left[\frac{y(t)}{2} \right]^{\mu/(2p)} t^{(1+\mu)/2} \Gamma \left(1 - \frac{\mu}{2p} \right) \mathcal{J}_{-\mu}[y(t)], \end{aligned} \tag{4.36}$$

donde $\mu = \sqrt{4p^2m^2 - 9p(p+1) + 2}$ y $y(t) = k_r(t_0/t)^p$. En general, esta expresión no es normalizable. Sin embargo, existen algunas soluciones particulares de (4.35) que si lo son. Un caso particular de solución normalizable resulta de tomar $m = \pm[1/(2p)]\sqrt{9p(p+1) + 4\alpha p - 1}$. En este caso, la ecuación dinámica para los modos gravitacionales cuánticos se reduce a

$$\ddot{\chi}_{k_r} + \left[k_r^2 p^2 t_0^{2p} t^{-2(p+1)} - \alpha p t^{-2}\right] \chi_{k_r} = 0, \tag{4.37}$$

cuya solución general es

$$\chi_{k_r}(t) = \sqrt{t}\left\{C_1 \mathcal{H}_\omega^{(1)}\left[k_r\left(\frac{t_0}{t}\right)^p\right] + C_2 \mathcal{H}_\omega^{(2)}\left[k_r\left(\frac{t_0}{t}\right)^p\right]\right\}, \tag{4.38}$$

siendo C_1 y C_2 constantes de integración, y $\omega = [1/(2p)]\sqrt{1+4\alpha p}$. La solución normalizada de Bunch-Davies es entonces

$$\chi_{k_r}(t) = \frac{i}{2}\sqrt{t}\sqrt{\frac{1}{\pi p}}\mathcal{H}_\omega^{(2)}\left[k_r\left(\frac{t_0}{t}\right)^p\right]. \tag{4.39}$$

En este caso la amplitud de las fluctuaciones tensoriales en la métrica en 4D sobre escalas super-Hubble ($k_r \gg k_H$) será

$$\left\langle h^2 \right\rangle_{IR} = \frac{2^{2\omega}}{p\,\pi^5}\frac{\Gamma^2(\omega)}{3-2\omega}\left(\frac{t_0}{t}\right)^{(3-2\omega)p+1} \epsilon^{3-2\omega} k_H^{3-2\omega}. \tag{4.40}$$

Y así es espectro gravitacional $\mathcal{P}_g(k_r)$ es en este caso

$$\mathcal{P}_g(k_r) = \frac{2^{2\omega}}{p\,\pi^5}\Gamma^2(\omega)\left(\frac{t_0}{t}\right)^{(3-2\omega)p+1} k_r^{3-2\omega}\Bigg|_{k_r=\epsilon k_H}. \tag{4.41}$$

Claramente, para $p \simeq 1/3$ (que corresponde a $m \simeq 3\sqrt{3}/2 > 3/2$), el espectro es cercano al invariante de escala, esto es $n_T \equiv 3 - 2\omega \simeq 0$.

4.5 Aproximación estocástica: Campo de grano grueso en 4D

Ahora vamos a definir el campo de grano grueso tensorial con la siguiente foliación $\psi = \psi_0$, ${}^{(L)}\chi^i{}_j(t, \vec{r}, \psi = \psi_0)$, los cuales pueden ser expandidos en los modos cuyas longitudes de onda sean mayor que el radio de Hubble

$$
\begin{aligned}
{}^{(L)}\chi^{i}{}_{j}(t,\vec{r},\psi_0) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k_r\,\theta(\epsilon k_0-k_r)\sum_{\alpha}^{(\alpha)} e^{i}{}_{j} \\
&\times \left[a^{(\alpha)}_{k_r}e^{i\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\chi_{k_r}(t,\psi_0)+a^{(\alpha)\,\dagger}_{k_r}e^{-i\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\chi^{*}_{k_r}(t,\psi_0)\right] \qquad (4.42)
\end{aligned}
$$

donde

$$
k_0(t) = \left[\frac{5}{16}\frac{\dot{\Lambda}^2}{\Lambda^2}-\frac{1}{4}\frac{\ddot{\Lambda}}{\Lambda}+\left(\frac{3}{4}-\frac{m^2}{3}\right)\Lambda\right]^{1/2}\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}e^{\int\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}dt}. \qquad (4.43)
$$

El campo ${}^{(L)}\chi^{i}{}_{j}(t,\vec{r},\psi_0)$ estará dado por la ecuación de movimiento

$$
{}^{(L)}\ddot{\chi}^{i}{}_{j}-\frac{\Lambda}{3}k_0^2e^{-2\int\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}dt}\,{}^{(L)}\chi^{i}{}_{j}=\epsilon\left[\ddot{k}_0\eta^{i}{}_{j}(t,\vec{r},\psi_0)+\dot{k}_0\kappa^{i}{}_{j}(t,\vec{r},\psi_0)+2\dot{k}_0\gamma^{i}{}_{j}(t,\vec{r},\psi_0)\right]. \qquad (4.44)
$$

Los operadores tensoriales estocásticos $\eta^{i}{}_{j}$, $\kappa^{i}{}_{j}$ y $\gamma^{i}{}_{j}$, en la métrica efectiva 4D (4.18) están respectivamente dados por

$$
\begin{aligned}
\eta^{i}\,j(t,\vec{r},\psi_0) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k_r\delta(\epsilon k_0-k_r)\sum_{\alpha}^{(\alpha)} e^{i}{}_{j} \\
&\times \left[a^{(\alpha)}_{k_r}e^{i\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\chi_{k_r}(t,\psi_0)+a^{(\alpha)\,\dagger}_{k_r}e^{-i\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\chi^{*}_{k_r}(t,\psi_0)\right], \qquad (4.45)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa^{i}\,j(t,\vec{r},\psi_0) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k_r\dot{\delta}(\epsilon k_0-k_r)\sum_{\alpha}^{(\alpha)} e^{i}{}_{j} \\
&\times \left[a^{(\alpha)}_{k_r}e^{i\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\chi_{k_r}(t,\psi_0)+a^{(\alpha)\,\dagger}_{k_r}e^{-i\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\chi^{*}_{k_r}(t,\psi_0)\right], \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma^{i}\,j(t,\vec{r},\psi_0) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k_r\delta(\epsilon k_0-k_r)\sum_{\alpha}^{(\alpha)} e^{i}{}_{j} \\
&\times \left[a^{(\alpha)}_{k_r}e^{i\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\dot{\chi}_{k_r}(t,\psi_0)+a^{(\alpha)\,\dagger}_{k_r}e^{-i\vec{k}_r\cdot\vec{r}}\dot{\chi}^{*}_{k_r}(t,\psi_0)\right]. \qquad (4.47)
\end{aligned}
$$

Usando propiedades diferenciales de los operadores estocásticos anteriores, la ecuación (4.44) puede escribirse como

$$
{}^{(L)}\ddot{\chi}^{i}{}_{j}-\frac{\Lambda}{3}k_0^2e^{-2\int\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}dt}\,{}^{(L)}\chi^{i}_{j}=\epsilon\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{k}_0\eta^{i}{}_{j}(t,\vec{r},\psi_0)\right)+\dot{k}_0\gamma^{i}{}_{j}(t,\vec{r},\psi_0)\right]. \qquad (4.48)
$$

Esta es una ecuación estocástica de segundo orden que puede escribirse como un sistema de ecuaciones de primer orden en la forma

$$\dot{u}^i{}_j = \frac{\Lambda}{3} k_0^2 e^{-2\int \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} dt}\, {}^{(L)}\chi^i{}_j + \epsilon \dot{k}_0 \gamma^i{}_j, \tag{4.49}$$

$${}^{(L)}\dot{\chi}^i{}_j = u^i{}_j + \epsilon \dot{k}_0 \eta^i{}_j, \tag{4.50}$$

donde hemos introducido el campo auxiliar $u^i{}_j \equiv^{(L)} \dot{\chi}^i{}_j - \epsilon \dot{k}_0 \eta^i{}_j$. Ahora, para minimizar el papel del ruido estocástico $\gamma^i{}_j$, imponemos la condición $\dot{k}_0^2 \langle \gamma^2 \rangle \ll \ddot{k}_0^2 \langle \eta^2 \rangle$, donde hemos definido la cantidad $\langle \gamma^2 \rangle = \langle 0 | \gamma^i{}_j \gamma_i{}^j | 0 \rangle$ y similarmente para $\langle \eta^2 \rangle$. Esta condición puede ser expresada en términos de los modos-k_r como

$$\frac{\dot{\chi}_{k_r} \dot{\chi}^*_{k_r}}{\chi_{k_r} \chi^*_{k_r}} \ll \left(\frac{\ddot{k}_0}{\dot{k}_0} \right)^2, \tag{4.51}$$

la cuál es válida sólo en escalas mucho mayores que el horizonte observable. Bajo esta consideración el sistema (4.49)-(4.50) se transforma en

$$\dot{u}^i{}_j = \frac{\Lambda}{3} k_0^2 e^{-2\int \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} dt}\, {}^{(L)}\chi^i{}_j, \tag{4.52}$$

$${}^{(L)}\dot{\chi}^i{}_j = u^i_j + \epsilon \dot{k}_0 \eta^i{}_j. \tag{4.53}$$

Este nuevo sistema puede ser visto como dos ecuaciones de Langevin con un ruido tensorial $\eta^i{}_j$ el cual es blanco y Gaussiano. Por consiguiente, satisface

$$\langle \eta \rangle = \left\langle g^j{}_i \eta^i{}_j \right\rangle = 0, \tag{4.54}$$

$$\left\langle \eta^2 \right\rangle = \left\langle \eta^i{}_j \eta^j{}_i \right\rangle = \frac{3\epsilon k_0^2}{\pi^2 \dot{k}_0} \chi_{\epsilon k_0} \chi^*_{\epsilon k_0} \delta(t - t'). \tag{4.55}$$

La correspondiente ecuación de Fokker-Planck que describe la dinámica de la probabilidad de transición $\mathcal{P}^i{}_j \left[{}^{(L)}\chi_0{}^i{}_j, u_0{}^i{}_j | {}^{(L)}\chi^i{}_j, u^i{}_j \right]$ desde la configuración $({}^{(L)}\chi_0{}^i{}_j, u_0{}^i{}_j)$ hacia $({}^{(L)}\chi^i{}_j, u^i{}_j)$ es entonces

$$\frac{\partial \mathcal{P}^i{}_j}{\partial t} = -u^i{}_j \frac{\partial \mathcal{P}^i{}_j}{\partial^{(L)}\chi^i{}_j} - \mu^2(t)^{(L)}\chi^i{}_j \frac{\partial \mathcal{P}^i{}_j}{\partial u^i{}_j} + \frac{1}{6} D_{\eta\eta} \frac{\partial^2 \mathcal{P}^i{}_j}{\partial \left({}^{(L)}\chi^i{}_j \right)^2}, \tag{4.56}$$

donde $\mu^2(t) = (\Lambda/3) k_0^2 \exp[-2\int \sqrt{\Lambda/3} dt]$ y la única componente no nula del tensor de difusión es $D_{\eta\eta}(t) = [(\epsilon \dot{k}_0^2)/2] \int dt \, \langle \eta^2 \rangle$. Obsérvese que hemos considerado $D_{\eta\eta} = 3D_{\eta^i{}_j\eta^i{}_j}$, debido a que el espacio 3D $r(x,y,z)$ es isotrópico. Este coeficiente de difusión está relacionado con el campo ${}^{(L)}\chi$ debido a la acción estocástica del ruido efectivo η (relacionado a $\eta^i{}_j$). Por esto, en principio es posible obtener una ecuación de movimiento para $\left\langle {}^{(L)}\chi^2 \right\rangle \equiv \left\langle 0|{}^{(L)}\chi^i{}_j {}^{(L)}\chi_i{}^j|0 \right\rangle = \int d^{(L)}\chi du^{(L)}\chi u\mathcal{P}[{}^{(L)}\chi, u]$, la cual toma la forma

$$\frac{d}{dt}\left\langle {}^{(L)}\chi^2 \right\rangle = \frac{1}{2}D_{\eta\eta}(t), \tag{4.57}$$

donde consideramos $g^j{}_i\mathcal{P}^i{}_j = \mathcal{P}$, $\chi = g^j{}_i\chi^i{}_j$ y $u = g^j{}_iu^i{}_j$. Por lo tanto, la dinámica estocśtica de ${}^{(L)}\chi$ está completamente determinada y consecuentemente la estocástica en 4D para la correspondiente ${}^{(L)}h$, está dada por

$$\frac{d}{dt}\left\langle {}^{(L)}h^2 \right\rangle = -\left[3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{\dot{\Lambda}}{2\Lambda}\right]\left\langle {}^{(L)}h^2 \right\rangle + \frac{1}{2}e^{-\int dt\left[3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right]}D_{\eta\eta}(t). \tag{4.58}$$

La solución general de esta expresión es

$$\left\langle {}^{(L)}h^2 \right\rangle = \frac{1}{2}e^{-\int dt\left[3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right]}\int D_{\eta\eta}(t)dt, \tag{4.59}$$

donde $D_{\eta\eta} = [3\epsilon^3\dot{k}_0k_0^2/(2\pi^2)]\chi_{\epsilon k_0}\chi^*_{\epsilon k_0}$. Por lo tanto para un dado parámetro cosmológico $\Lambda(t)$, las fluctuaciones cuadradas estocásticas de h en escalas mucho mayores al horizonte observable, ${}^{(L)}h$, está determinada por la eq. (4.59).

4.6 Ejemplo

En este ejemplo volvemos a considerar un parámetro cosmológico decreciente $\Lambda(t) = 3p^2/t^2$ con $p > 0$, que claramente satisface $\dot{\Lambda} < 0$. En este caso la ecuación de campo dinámica para los modos χ_{k_r} se lee

$$\ddot{\chi}_{k_r} + \left\{k_r^2p^2t_0^{2p}t^{-2(p+1)} - \left[\left(m^2 - \frac{9}{4}\right)p^2 - \frac{9}{4}p + \frac{1}{4}\right]t^{-2}\right\}\chi_{k_r} = 0, \tag{4.60}$$

donde $M^2(t) = [(m^2 - 9/4)p^2 - (9/4)p + 1/4]t^{-2}$ puede ser interpretada como un término cuadrado de masa efectiva. Los valores permitidos para

m serán $9/4 < m^2 \leq (9/4)[1+9/4]$, para los cuales es válida la siguiente relación

$$\frac{9-\sqrt{117-16m^2}}{2(4m^2-9)} \leq p \leq \frac{9+\sqrt{117-16m^2}}{2(4m^2-9)}. \qquad (4.61)$$

No obstante, como se puede ver en (4.36), en general la solución no es normalizable, pero existen algunas soluciones particulares que si lo son. Una clase de estas soluciones se obtiene de considerar $m = \pm[1/(2p)]\sqrt{9p(p+1)+4\alpha p-1}$, donde $\alpha \geq 0$ es una constante real. En este caso la expresión (4.60) se reduce a

$$\ddot{\chi}_{k_r} + \left[k_r^2 p^2 t_0^{2p} t^{-2(p+1)} - \alpha p t^{-2}\right] \chi_{k_r} = 0, \qquad (4.62)$$

cuya solución normalizada (usando la condición de vacío de Bunch-Davies [33]), está dada por

$$\chi_{k_r}(t) = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi p}}\sqrt{t}\mathcal{H}_\nu^{(2)}\left[k_r\left(\frac{t_0}{t}\right)^p\right] \qquad (4.63)$$

donde $\mathcal{H}_\nu^{(2)}$ es la segunda función de Hankel y $\nu = [1/(2p)]\sqrt{1+4\alpha p}$. Así consideramos en este caso particular $k_0(t) = \sqrt{\alpha/p}(t/t_0)^p$ y usando la expansión asintótica $\mathcal{H}_\nu^{(2)}[x] \simeq (i/\pi)\Gamma(\nu)[x/2]^{-\nu}$, el coeficiente de difusión $D_{\eta\eta}$ queda

$$D_{\eta\eta}(t) = \frac{3\epsilon^{3-2\nu}}{\pi^5 p^{3/2-\nu}} 2^{-(3-2\nu)}\alpha^{3/2-\nu}\Gamma^2(\nu)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{3p}. \qquad (4.64)$$

De aquí la ecuación (4.59) toma la forma

$$\left\langle {}^{(L)}h^2\right\rangle = \frac{3\epsilon 3-2\nu}{\pi^5(3p+1)p^{3/2-\nu}}\Gamma^2(\nu)2^{-4+2\nu}\alpha^{3/2-\nu}t_0\left[1-\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1+3p}\right], \qquad (4.65)$$

la cuál para $p > 0$ y $t > t_0$ es siempre una cantidad positiva. Notemos que cuando $\alpha = 0$ automticamente $\left\langle {}^{(L)}h^2\right\rangle = 0$. Por otro lado, para un espectro invariante de escala (o sea $\nu = 3/2$) tenemos

$$\left\langle {}^{(L)}h^2\right\rangle = \frac{3\Gamma^2(\nu)}{2\pi^5(3p+1)}t_0\left[1-\left(\frac{t_0}{t}\right)^{1+3p}\right], \qquad (4.66)$$

la cuál es independiente del valor de α. En este caso tenemos que $9p^2 - 4\alpha p - 1 = 0$, entonces $p = \frac{2\alpha}{9}\left[1+\sqrt{1+\frac{9}{4\alpha^2}}\right]$, para $\alpha > 0$.

Conclusiones

Estudiamos la ondas gravitacionales en el universo temprano. Éstas se pueden considerar dominadas por un parámetro cosmológico decreciente, desde una métrica de fondo Riemann-plana pentadimensional, sobre la que definimos un vacío en 5D. Nuestra aproximación difiere de otras, porque consideramos a las ondas gravitacionales originadas por un campo físico Q_{ij}, y no por la fluctuación tensorial linealizada de la métrica. Sin embargo es posible tratar a Q_{ij} como a un campo tensorial con traza y divergencia nula.

La dinámica efectiva en 4D de las ondas gravitacionales, $h_{ij} = Q_{ij}(\psi = \psi_0)$ puede ser inducida por medio de una foliación sobre la quinta coordenada.

En esta tesis hemos desarrollado dos ejemplos:

- En el caso con un parámetro cosmológico constante, $\Lambda = \Lambda_0$, obtuvimos que la masa-KK de los gravitones debería ser $m \simeq 3/\sqrt{2}$ para obtener un espectro tensorial invariante de escala de $\langle h^2 \rangle_{SH}$. Este valor de m corresponde a una masa efectiva en 4D $M \simeq 3H_0/2 = \sqrt{3\Lambda}/2$. Notemos que esta masa puede ser relacionada con la masa de Einstein m_E, como lo fué en [34]: $M \simeq \frac{3}{2Gm_E}$.

- Mucho más interesante aún es el caso en que el parámetro cosmológico decrece con el tiempo. En este caso los gravitones son normalizables sólo cuando su masa efectiva M en 4D se vuelve nula. Obtuvimos que el espectro del cuadrado de las fluctuaciones de las ondas gravitacionales son invariantes de escala para las masas-KK con valores $m \simeq 3\sqrt{3}/2$.

En la segunda parte desarrollamos una aproximación estocástica para estudiar las ondas gravitacionales producidas durante inflación. Consideramos que la expansión está gobernada por un parámetro cosmológico decreciente. En nuestro caso particular, las fluctuaciones tensoriales de la métrica a gran escala son linealizadas, entonces éstas obedecen a la ecuación de onda. Sus componentes pueden ser consideradas en el sector infrarojo que obedecen al conjunto de ecuaciones estocásticas, afectadas por los ruidos tensoriales ${\eta^i}_j$ (en nuestro caso, blancos y gaussianos).

En analogía a la isotropía del espacio tridiemensional, es posible definir un coeficiente de difusión $D_{\eta\eta}$ para describir la evolución de $\left\langle {}^{(L)}h^2 \right\rangle$. En particular obtenemos que para $\Lambda(t) = 3p^2/t^2$ ($p > 1$ y $m = [1/(2p)]\sqrt{9p(p+1) + 4\alpha p - 1}$), el parámetro α está restringido por la desigualdad $\frac{9p^2-1}{4p} = \alpha > 0$ para un espectro inavariante de escala de $\left\langle {}^{(L)}h^2 \right\rangle$, $m^2 = n^2 + \frac{[9p(p+1)-2]}{4p^2}$, considerando al índice espectral n y el parámetro p que caracterizan el decaimiento del parámetro cosmológico $\Lambda(t)$.

Recientemente se han obtenido valores teóricos a partir de resultados experimentales correspondientes a Cosmic Microwave Background Radiation (Radiación Cósmica de Fondo) y Large Scale Structure (Estructura en gran escala)[35]. Este nuevo análisis arrojó como resultado un índice espectral tensorial $n_T \simeq 0.055$. Dicho resultado concuerda muy bien con el obtenido a partir de la ecuación (4.32) para un espectro gravitacional cuasi invariante de escala, con $m \simeq 2.1$.

Bibliography

[1] A. H. Guth, Phys. Rev **D23**, 347 (1981).

[2] A. D. Linde, Phys. Lett. **B116**, 335 (1982).

[3] A. Albrecht, P. Steinhardt, Phys. Lett **131**, 45 (1983).

[4] M. Aaronson, J. Mould, J. Huchra, W. T. Sullivan, R. A. Schommer and G. D. Bothun, J. Astrophys. **239**,12,66-B1 (1980).

[5] D. Branch, Mon. Not. R. Astron. Soc. **186**, 609 (1979).

[6] R. H. Dicke and P. J. E. Peebles, General Relativity: An Einstein Centenary Survey, (ed. S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press: Cambridge).

[7] W. Rindler, Mon. Not. Roy. Ast. Soc., **116**, 663 (1956)

[8] L. Kofman, L. Linde and A. A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett. **73**, 3195 (1995).

[9] J. Ellis and G. Steigman, Phys. Lett. **B89**, 186 (1980).

[10] J. P. Preskill, Phys. Rev. Lett **43**, 1365 (1979); Ya. B. Zeldovich and M. Yu. Khlopov, Phys. Lett. **B79**, 239 (1978).

[11] S. Coleman and F. De Luccia, Phys. Rev. **D21**, 3305 (1980).

[12] E. J. Copeland, E. W. Kolb, A. R. Liddle and J. E. Lidsey, Phys. Rev. **D48**, 2529 (1993).

[13] E. Copeland, E. W. Kolb, A. R. Liddle and J. E. Lidsey, Phys. Rev. **D49**, 1840 (1993).

[14] A. Riotto, *Inflation and the theory of cosmolgical perturbations*. Lectures delivered at the "ICTP summer school on Astroparticle physics and cosmology". E-print: hep-ph/0210162

[15] E. Lishitz, zh. Eksp. Teor. Fiz. 16 (1946) 587.

[16] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology (Wiley, New York, 1972).

[17] R. Arnowitt and S. Deser, Phys. Rev. **113**, 745 (1959); R. Arnowitt, S. Deser and c. W. Misner, Phys. Rev. **121**, 1556 (1961); T. A. Barnebey, Phys. Rev. **D10**, 1741 (1974); D. L. Lee, Phys. Rev. **D10**, 2374 (1974).

[18] A. Starobinsky, JETP Lett. **30**, 682 (1979); V. Rubakov, M. Sazhin and A. Veryaskin, Phys. Lett. B**B115**, 189 (1982); R. Fabbri and M. Pollock, Phys. Lett. **B125**, 445 (1983); L. Abbott and D. Harari, Nucl. Phys. **B264**, 487 (1986); E. Stewart and D. Lyth, Phys. Lett. **B302**, 171 (1983).

[19] M. Kamionkowski, A. Kosowsky and A. Stebbins, Phys. Rev. **D55**, 7368 (1997); *ibid.*, Phys. Rev. Lett. **78**, 2058 (1997).

[20] M. Kesden, A. Cooray and M. Kamionkowski, Phys. Rev. Lett. **89**, 011304 (2002).

[21] L. Knox and Y. Song, Phys. Rev. Lett. **89**, 011303 (2002).

[22] U. Seljak and C. M. Hirata, Astrophys. J. **463**, 1 (1996).

[23] For a general update see the following special issue: Class. Quant. Grav. **23** (2006).

[24] T. L. Smith, H. V. Peiris and A. Cooray, Phys. Rev. **D73**, 123503 (2006).

[25] L. P. Grinshchuk. Sov. Phys. JETP **40**, 409 (1975); B. Allen, Phys. Rev. **D37**, 2078 (1988).

[26] J. Bardeen, Phys. Rev. **D22**, 1882 (1980).

[27] G. F. R. Ellis and M. Bruni, Phys. Rev. **D40**, 1804 (1989).

[28] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999).

[29] P. S. Wesson, Gen. Rel. Grav. **16**, 193 (1984); P. Wesson, Gen. Rel. Grav. **22**, 707 (1990); P. S. Wesson, Phys. Lett. **B276**, 299 (1992); P. S. Wesson and J. Ponce de Leon, J. Math. Phys. **33**, 3883 (1992); H. Liu and P. S. Wesson, J. Math. Phys. **33**, 3888 (1992); P. Wesson, H. Liu and P. Lim, Phys. Lett. **B298**, 69 (1993).

[30] M. Bellini, Phys. Lett. **B632** (2006) 610-616.

[31] J.E. Madriz Aguilar, Phys. Lett. **B645** (2007) 6-11.

[32] J. Ponce de Leon, Gen. Rel. Grav. **20**, 539 (1988).

[33] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, Proc. Roy. Soc. **A360**, 117 (1978).

[34] P. S. Wesson, Mod. Phys. Lett. **A19**, 1995 (2004).

[35] C. Destri, H. J. de Vega, N. G. Sanchez, Phys. Rev. **D77**, 043509 (2008).