



UNIVERSIDAD NACIONAL DE MAR DEL PLATA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA.

MÚLTIPLES MEDICIONES Y EVOLUCIÓN DE UN SISTEMA CUÁNTICO

Por
Ignacio García-Mata

Trabajo de Diploma realizado de
acuerdo con los requisitos para optar
por el título de Licenciado en Física.

Agosto de 2000.

Director: Dr. Alberto Clemente de la Torre.

“Als das Kind Kind war,
war das die Zeit der ...
folgenden Fragen:
Warum bin ich Ich
und warum nicht Du?
Warum bin ich hier
und warum nicht dort?
Wann begann die Zeit
und wo endet der Raum?
Ist das Leben unter der Sonne
nicht bloss ein Traum?”

Wim Wenders & Peter Handke
“Der Himmel Über Berlin”

Índice General

Agradecimientos	iv
1 Introducción general	1
2 Efecto Zenón Cuántico	2
2.1 Introducción	2
2.2 Demostración general usando colapso de la función de onda . .	3
2.3 Decaimiento a un continuo de estados	5
2.4 Comprobación Experimental	8
2.4.1 Experimento de Itano <i>et al.</i>	8
2.4.2 Experimentos Propuestos	14
2.5 Discusión sobre el límite $N \rightarrow \infty$	16
2.6 Comentario	17
3 Múltiples mediciones del impulso en una partícula libre	19
3.1 Introducción	19
3.2 Reducción del paquete de ondas	20
3.3 Descripción del Modelo	21
3.4 Resultados	25
3.5 Comentario	30
4 Conclusión	31
A Apéndice:	
Caminante aleatorio con paso exponencialmente variable	33
A.1 Introducción	33
A.2 Características generales	34
A.3 Dependencia con el <i>step factor</i> . Fractalidad, autosimilaridad solapada y densidades suaves	36
A.4 Agregado computacional	39
A.5 Resumen	41
Bibliografía	43

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mi director, Alberto de la Torre, por su confianza y estimulante espíritu de trabajo. Además por permitirme participar en su grupo de investigación y conseguir una experiencia que valoro muchísimo.

Por supuesto, quiero agradecer a Angeles, que creció conmigo y es el amor de mi vida.

A mis padres, que siempre me bancaron (en TODO sentido), aún cuando tuve la “iluminada” idea de cambiarme de Ingeniería a Física.

Por último, pero no menos importante, quiero agradecer a las siguientes personas: Charlie y Rochi (mis hermanos, con mayúscula)Coté, Nani, Rafa y Gloria (mis otros hermanos, los quiero tanto como a Ch. y R.); Susana y Pichín (mis segundos padres); María de la Paz (Mi amiga); Silvina (mi apoyo en la carrera); Lourdes, Leo y Javier (mis compañeros); Mariela (por bancarme y ayudarme tanto); Alejandro (por estar ahí, una inspiración); “el Baca”, Ricky, Paco, Fernando, Maxi, Pájaro, Tomi, Max, Albertina...(gente con la que compartí muchas, diferentes, cosas); todos los profesores del departamento, en especial Héctor Martin; a Vinícius (“o branco mais preto du Brasil”) y W. A. Mozart.

Mar del Plata, B.A.
Agosto de 2000

Ignacio García-Mata

1 Introducción general

La medición en mecánica cuántica es un problema. No recordamos ningún autor que trate las cuestiones fundamentales de la teoría cuántica y que no hable del “problema de la medición”. De acuerdo a la interpretación de Copenhagen

en cualquier medición, el estado del objeto observado es afectado por el instrumento macroscópico de medición cuya existencia y modo de operación, no son tenidos en cuenta en la teoría en sí sino que se considera que preceden lógicamente a la teoría[1].

Desde el nacimiento de la teoría cuántica y la posterior axiomatización de von Neumann (y la reducción de la función de ondas), pasando por una serie de variaciones y nuevas interpretaciones, cada una tratando de ajustarse a una dada convicción filosófica, la medición siempre ocupó un lugar predominantemente controversial.

Queda claro que la medición u observación implicará tarde o temprano (aunque no intentaremos determinar cuándo) el acoplamiento del objeto observado con un sistema macroscópico, y esto afectará al objeto o sistema.

En este trabajo estudiaremos las consecuencias de una observación sistemática mediante repetidas mediciones de un sistema cuántico. La mecánica cuántica predice para sistemas dependientes del tiempo (en especial para sistemas inestables) una restricción en la evolución temporal llegando a frenar la evolución por completo en el límite de un continuo de mediciones. Este efecto se estudia en el Capítulo 2 bajo el nombre de *Efecto Zenón Cuántico*. Presentamos las condiciones necesarias para su observación así como posibles experimentos.

A la vista de lo estudiado en la sección 2, en la sección 3 proponemos un modelo para realizar repetidas mediciones sobre un sistema simple: la partícula libre. Este modelo dio paso posteriormente al estudio de otro sistema físico: el caminante aleatorio con paso variable (Apéndice A). Nos encontramos con un problema abierto que presenta una alta dependencia de la distribución de posiciones finales con el paso (*step factor*) s del caminante.

2 Efecto Zenón Cuántico

“Measurement, after all, constitutes the link between theory and experience, and its analysis is therefore one of the most sensitive parts of any interpretation”

Max Jammer

2.1 Introducción

A pesar de que hace ya un siglo desde la primera aparición del concepto de quantum, todavía no existe una interpretación aceptada universalmente para la mecánica cuántica. Uno de los temas más discutidos es la teoría de la medición, “... punto de inflexión en la mecánica cuántica...” [3]. Sin embargo, podemos decir que todos los especialistas en *Fundamentos de la Mecánica Cuántica* están de acuerdo en que un sistema cuántico es modificado en forma fundamental cuando se lo “observa” o se obtiene algún tipo de información sobre su estado. Por supuesto, los sistemas clásicos también sufren modificaciones cuando son observados, pero éstas son perfectamente calculables y de hecho, cuando los efectos debidos a la medición son apreciables, se realizan las correcciones en función de los mismos. En los sistemas cuánticos este tipo de correcciones es imposible porque aparece un concepto que lo impide: la indeterminación. Por eso no debería extrañarnos que un sistema se vea afectado de una forma que es, por lo menos, poco intuitiva (en el sentido mecánico cuántico de intuición, que de por sí es muy poco intuitivo), si se realiza sobre él una sucesión de mediciones u observaciones durante un lapso de tiempo predeterminado.

Un sistema cuántico evoluciona a través de una superposición coherente de estados. De manera muy general, veremos que la observación sucesiva de un sistema preparado en un estado inicial retarda su evolución de forma tal que, en el límite de un continuo de mediciones (infinitas en un determinado intervalo de tiempo), la detiene por completo, esto es, el sistema queda *congelado* en su estado inicial. Algunos han llamado a este efecto *watched-pot effect*, en alusión al dicho popular que dice que “... mientras uno observa el agua calentándose en una cacerola, el agua nunca hierve...”. El nombre que se le da actualmente se debe a Misra y Sudarshan[2], quienes lo

llamaron *Quantum Zeno Paradox* (paradoja de Zenón cuántica), en honor al filósofo griego Zenón (de Elea) que vivió por los años 500 a.c. y formuló varias paradojas que cuestionaban la idea misma de movimiento. El nombre luego se transformó en *Quantum Zeno Effect* (QZE) o Efecto Zenón Cuántico debido al reclamo justificado de muchos autores que señalaban que la naturaleza del efecto no tenía nada de paradójico, si no que era una impresionante ilustración de la naturaleza participativa de la medición cuántica[4].

La excitación que el QZE suscitó en los primeros momentos se debe a que parecía ser un fuerte argumento a favor del postulado de proyección o colapso de la función de onda. Sin embargo, a pesar de que esta postura es mantenida por algunos autores, otros han demostrado que es posible obtener QZE sin hacer uso del postulado de proyección, alegando que se trata de un proceso puramente dinámico[5].

2.2 Demostración general usando colapso de la función de onda

Consideremos un sistema en un estado inicial $|\psi_0\rangle$ a tiempo $t = 0$ cuya evolución temporal está determinada por un hamiltoniano H . El estado del sistema en un tiempo t está dado por

$$|\psi(t)\rangle = \exp(-iHt/\hbar)|\psi_0\rangle. \quad (2.1)$$

La probabilidad de que el sistema se encuentre en su estado inicial a tiempo t , o probabilidad de supervivencia, es:

$$P(t) = |\langle\psi_0|\exp(-iHt/\hbar)|\psi_0\rangle|^2. \quad (2.2)$$

Desde ahora, y durante el resto del trabajo, tomamos $\hbar = 1$.

Como sabemos que vamos a considerar intervalos de tiempo pequeños podemos desarrollar la exponencial en serie de potencias. Si conservamos hasta el segundo orden en t , obtenemos:

$$\langle\psi_0|\exp(-iHt)|\psi_0\rangle = 1 - i\langle H\rangle t - \frac{1}{2}\langle H^2\rangle t^2 + O(t^3) \quad (2.3)$$

Por lo tanto la probabilidad de supervivencia tiene la forma:

$$P(t) = 1 - (\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2)t^2 + O(t^4) = 1 - (\Delta E)^2 t^2 + O(t^4) \quad (2.4)$$

El postulado de colapso de la función de onda indica que luego de una medición el sistema evoluciona como si su estado inicial fuera el que resultó de la medición. Para que al final de N mediciones, en intervalos de tiempo t/N , obtengamos el estado inicial, debemos calcular la probabilidad de que en cada medición encontremos al sistema en estado $|\psi_0\rangle$. Por lo tanto, para valores suficientemente grandes de N , la probabilidad de supervivencia luego de N mediciones será:

$$P_N(t) \simeq \left(1 - (\Delta E)^2 \left(\frac{t}{N}\right)^2\right)^N \quad (2.5)$$

que en el límite $N \rightarrow \infty$, tiende a la unidad. Como consecuencia de la dependencia $(t/N)^2$ de $P_N(t)$, un sistema en un estado *inestable* $|\psi_0\rangle$, observado *continuamente*, permanecerá en ese estado. Por eso es que decimos que en el límite de observación continua el estado sistema queda congelado en su estado inicial.

Para esta deducción no tuvimos en cuenta el estado del aparato de medición y aplicamos el colapso de la función de onda solamente al sistema observado. Es importante destacar que el QZE no es necesariamente consecuencia del colapso de la función de onda. Existen deducciones de este mismo efecto usando hipótesis mucho más generales (“historias” o acoplamiento directo entre instrumento y sistema)[4].

Para el QZE es necesario que la dependencia temporal de la probabilidad de supervivencia sea por lo menos *cuadrática*[4] y que ΔE sea distinto de cero y finito. Si en lugar de la expresión (2.4) para $P(t)$, tuviéramos una con dependencia lineal, tipo $P(t) = 1 - \Gamma t$, la expresión equivalente a (2.5) para este caso, quedaría

$$P_N(t) = \left(1 - \Gamma \left(\frac{t}{N}\right)\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{(-\Gamma t)} \neq 1 \quad \text{para } t \neq 0. \quad (2.6)$$

En el caso de que $P(t)$ dependa de una potencia de t genérica, tipo

$$P(t) = 1 - Kt^m \quad (2.7)$$

tenemos que, luego de N mediciones en intervalos $t/N, 2t/N, \dots, t$, la probabilidad de encontrar al sistema en el estado inicial es

$$P_N(t) = \left(1 - K \left(\frac{t}{N}\right)^m\right)^N \simeq 1 - Kt^m N^{1-m}, \quad (2.8)$$

o sea, $P_N \rightarrow 1$ cuando $N \rightarrow \infty$, siempre que $m \geq 2$. Por lo tanto, concluimos que la dependencia cuadrática es condición *suficiente* para el QZE pero que alcanza con una potencia cualquiera $m \geq 2$.

2.3 Decaimiento a un continuo de estados

Las condiciones para el QZE (dependencia t^2 y ΔE finito) pueden parecer extrañas en sistemas inestables ligadas a un continuo de estados mediante una perturbación V . Los enfoques usuales de libros de texto están expresamente destinados a deducir la dependencia lineal en t , dando como resultado más importante la *regla de oro de Fermi* para calcular probabilidades de transición por unidad de tiempo. Sin embargo siguiendo el tratamiento “de libro de texto” veremos que para tiempos pequeños se obtiene una dependencia t^2 .

Consideramos un sistema físico con hamiltoniano $H = H_0$ que suponemos que no tiene dependencia explícita con el tiempo. Los autovalores y autoestados de H_0 están definidos por:

$$H_0 |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle. \quad (2.9)$$

A tiempo $t = 0$ aplicamos una perturbación V que deja el hamiltoniano total separado en dos partes:

$$H = H_0 + V. \quad (2.10)$$

Por simplicidad suponemos que V tampoco tiene dependencia explícita con el tiempo y que en la base de autoestados de H_0 no tiene elementos diagonales, esto es

$$\langle \varphi_m | H | \varphi_k \rangle = \begin{cases} \langle \varphi_m | V | \varphi_k \rangle & \text{para } m \neq k \\ \langle \varphi_m | H_0 | \varphi_k \rangle & \text{para } m = k \end{cases}. \quad (2.11)$$

Suponemos que el estado inicial es $|\varphi_i\rangle$, autoestado de H_0 con energía E_i , y que el estado final es un continuo de estados en el intervalo $(E, E + \delta E)$, con densidad

$$\rho(E)dE.$$

A primer orden de la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo (TPDT) [6, 7, 8] la probabilidad de *transición* a un continuo de estados es

$$Q(t) = \int_{E_n \in (E, E+\delta E)} |V_{ni}|^2 \rho(E_n) \times \text{sen}^2 [(E_n - E_i)t/2] \left[\frac{(E_n - E_i)}{2} \right]^{-2} dE_n \quad (2.12)$$

donde $V_{ni} = \langle \varphi_n | V | \varphi_i \rangle$ son los elementos de la representación matricial de V .

Para tiempos pequeños

$$\text{sen}^2 [(E_n - E_i)t/2] \simeq \left(\frac{E_n - E_i}{2} \right)^2 t^2$$

entonces

$$Q(t) = \left(\int_{E_n \in (E, E+\delta E)} |V_{ni}|^2 \rho(E_n) dE_n \right) t^2. \quad (2.13)$$

La integral en (2.13) es justamente la variación de la energía al cuadrado $(\Delta E)^2$ a primer orden en TPDT. Así la probabilidad de encontrar al sistema en su estado inicial será

$$P(t) = 1 - Q(t) = 1 - (\Delta E)^2 t^2$$

que tiene dependencia t^2 como esperábamos.

En los tratamientos usuales se consideran tiempos “suficientemente largos”. En la figura 2.1 se observa que la mayor parte de la probabilidad está concentrada en el pico central de la función $\text{sen}^2(\omega t/2)/\omega^2$, que para tiempos fijos largos se hace cada vez más estrecho y más alto. A medida que t se hace grande el integrando en (2.12) se hace apreciable solamente para aquellos estados finales que satisfacen

$$t \sim \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{|E_n - E_i|}. \quad (2.14)$$

Si llamamos Δt al tiempo durante el que la perturbación estuvo encendida, una transición apreciable es posible solamente si

$$\Delta t \Delta E \sim 1, \quad (2.15)$$

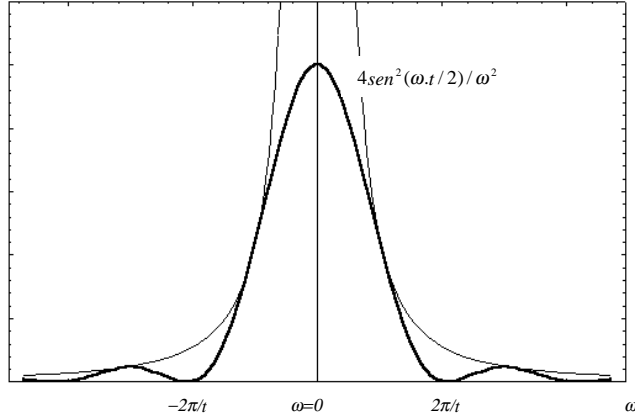


Figura 2.1: Gráfico de $4\text{sen}^2(\omega t/2)/\omega^2$ en función de ω para t fijo, donde $\omega = (E_n - E_i)$.

donde ΔE representa el cambio de energía en una transición con probabilidad apreciable. En el límite $t \rightarrow \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}^2(\omega t)}{\omega^2 t} = \delta(\omega),$$

donde δ es la delta de Dirac. Teniendo en cuenta esto y (2.12) la probabilidad de transición es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 2\pi |\overline{V_{ni}}|^2 \rho(E_n = E_i) t \quad (2.16)$$

($|\overline{V_{ni}}|^2$ es el promedio de $|V_{ni}|^2$ que puede sacarse fuera de la integral.)

Por lo tanto para tiempos grandes, una transición con probabilidad apreciable requiere conservación de la energía ($\Delta E = 0$) y muestra un comportamiento lineal en t que como se vio en (2.6) para el límite de un continuo de mediciones ($N \rightarrow \infty$) tiene comportamiento exponencial decreciente, que es bastante diferente al de QZE. En esta región de tiempos grandes, con comportamiento exponencial para la probabilidad de supervivencia, si realizamos N mediciones en intervalos de tiempo t/N la probabilidad total $P_n(t)$ será igual a la probabilidad después de un tiempo t sin realizar ninguna medición, $P(t)$:

$$\begin{aligned} P_N(t) &= P(t/N) \cdot P(2t/N - t/N) \cdots P(Nt/N - (N-1)t/N) \\ &= (e^{-\Gamma t/N})^N = e^{-\Gamma t}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Podemos concluir que en una región de tiempos suficientemente pequeños hay inhibición de la probabilidad de transición (QZE) debida a múltiples interacciones o mediciones, como consecuencia de la dependencia t^2 ; en la región de tiempos suficientemente grandes, con probabilidad de transición lineal en t , no se cumplen las condiciones para QZE sino que hay decaimiento exponencial.

2.4 Comprobación Experimental

Además de la inhibición del decaimiento de sistemas inestables, el nombre Efecto Zenón Cuántico puede ser aplicado a la inhibición de transiciones inducidas por perturbaciones repetidas que son consideradas indirectamente como mediciones. El último es el caso que ha sido observado experimentalmente, en contraposición al que corresponde a la formulación original que presenta dificultades principalmente porque involucra tiempos de observación demasiado pequeños.

2.4.1 Experimento de Itano *et al.*

En 1990 Itano, Heinzen, Bollinger y Wineland[9] realizaron un experimento propuesto por Cook[10] que, reclaman, demuestra el QZE inducido por interacciones o perturbaciones repetidas en un sistema.

El experimento consiste de un sistema de tres niveles inicialmente preparado en el estado fundamental $|\phi_1\rangle$. Al aplicar sobre el sistema un campo resonante de radiofrecuencia, con frecuencia $\omega_{21} = (E_2 - E_1)$, se inducen transiciones a un estado metaestable $|\phi_2\rangle$ (E_1 y E_2 son las energías de los estados $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ respectivamente). Asumimos que las transiciones espontáneas $|\phi_2\rangle \rightarrow |\phi_1\rangle$ son despreciables. Mientras tanto se está aplicando una serie de pulsos láser muy cortos y muy intensos, con frecuencia $\omega_{31} = (E_3 - E_1)$, que provocan transiciones, con probabilidad aproximadamente uno, desde el estado $|\phi_1\rangle$ hasta un estado inestable $|\phi_3\rangle$, que decae inmediatamente emitiendo un fotón observable por fluorescencia. Además, el campo de radiación láser no puede inducir transiciones $|\phi_2\rangle \rightarrow |\phi_3\rangle$. De esta forma queda establecida una correlación directa entre el campo óptico aplicado y el estado del sistema. Si se observa un fotón de fluorescencia significa que el sistema se encontraba en el estado ϕ_1 y si no se observa nada, se encontraba en $|\phi_2\rangle$

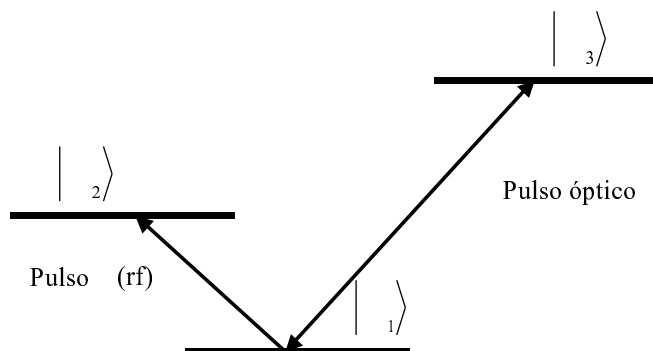


Figura 2.2: Esquema de sistema de tres niveles o *V-scheme*.

(resultado de tipo negativo¹). Como la observación (o no observación) del fotón de fluorescencia implica un conocimiento del estado del sistema, se pretende demostrar que esta “observación” del sistema retrasa la evolución temporal impidiendo las transiciones $|\phi_1\rangle \rightarrow |\phi_2\rangle$. Este tipo de sistemas de tres niveles también es conocido como *V-scheme* por la forma de *V* que tiene cuando se lo representa (ver la figura 2.2).

En su trabajo, Itano *et al.* comprobaron lo que predice la teoría para este problema; a medida que los pulsos ópticos se hacen más frecuentes se observan más fotones emitidos, indicio de que la probabilidad de transición $|\phi_1\rangle \rightarrow |\phi_2\rangle$ ha sido reducida notablemente. La principal diferencia entre el experimento propuesto por Cook y el realizado por Itano es que, en el primero, el sistema consistía de un único ion atrapado; Itano utilizó alrededor de 5000 iones ${}^9\text{Be}^+$ atrapados en una trampa magneto óptica y enfriados con láser.

Es preciso aclarar que tanto Itano como Cook sostenían la hipótesis de colapso de la función de onda y proponían este experimento como prueba. Sin embargo el tratamiento teórico que seguiremos[11](que nos parece más convincente) obtiene los mismo resultados que Cook pero no incluye colapso sino procesos puramente dinámicos.

Describiremos el sistema mediante los tres estados posibles ($|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ y $|\phi_3\rangle$) y los estados número de ocupación del campo de radiación de fluo-

¹*Negative type result.*

rescencia emitido por el ion al decaer ($|0\rangle, |1\rangle, \dots, |N\rangle$). Inicialmente, el átomo y el campo de radiación se encuentran en sus estados fundamentales:

$$|\Psi(0)\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |0\rangle \quad (2.18)$$

donde $|0\rangle$ representa el vacío de radiación. A tiempo $t = 0$ se aplica el campo rf resonante (de frecuencia $\omega = \omega_{21} = E_2 - E_1$ y amplitud γ) en forma de pulso π . Un pulso π es un pulso cuadrado con ancho temporal T tal que al final del pulso la probabilidad de transición es exactamente uno (figura 2.3). Antes de ser sometido al campo rf, el subsistema de niveles 1 y 2 tiene dos

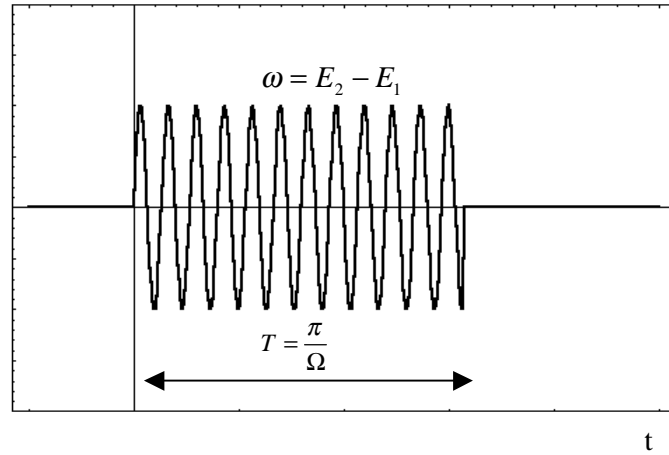


Figura 2.3: Ejemplo de pulso π .

estados estacionarios $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$. Es decir que si el estado inicial era $|\phi_1\rangle$ permanecerá en ese mismo estado (salvo un cambio de fase global). Cuando el campo rf es aplicado, los estados $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ dejan de ser estacionarios. Como consecuencia, el estado del sistema a un tiempo $t > 0$ tendrá la forma

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t)|\phi_1\rangle + c_2(t)|\phi_2\rangle, \quad (2.19)$$

donde las amplitudes $c_1(t)$ y $c_2(t)$ son

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \cos(\Omega t/2) \\ c_2(t) &= i \operatorname{sen}(\Omega t/2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

La frecuencia

$$\Omega = \sqrt{4\gamma^2 + (\omega - \omega_{21})^2} \quad (2.21)$$

es conocida como la frecuencia de Rabi. La condición de resonancia impuesta para el campo rf ($\omega = \omega_{21}$) implica que, en la ecuación (2.21), la frecuencia de Rabi es proporcional a la amplitud γ ,

$$\Omega = 2\gamma. \quad (2.22)$$

La probabilidad de encontrar al sistema en el nivel 1 (P) o en el 2 (Q) está

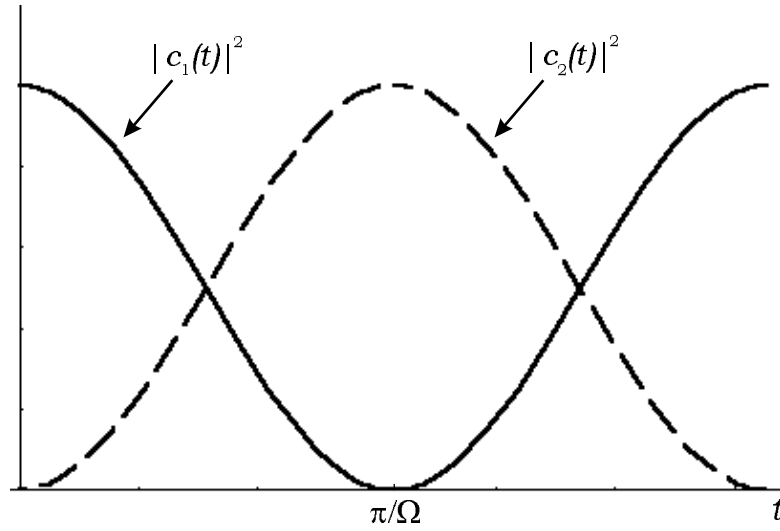


Figura 2.4: Gráfico de la dependencia temporal de las probabilidades $|c_1(t)|^2$ y $|c_2(t)|^2$ de encontrar al sistema de dos niveles en el estado $|\phi_1\rangle$ o $|\phi_2\rangle$ respectivamente. En el instante $t = 0$ el sistema se encuentra en el nivel 1 con probabilidad uno mientras que para $t = \pi/\Omega$ se encuentra en el nivel 2 con probabilidad uno. Esto indica que si no hay perturbaciones intermedias, la probabilidad de supervivencia al final del pulso rf es exactamente igual a cero.

dada por (figura 2.4)

$$\begin{aligned} P(t) &= |c_1(t)|^2 = \cos^2(\Omega t/2) \\ Q(t) &= |c_2(t)|^2 = 1 - |c_1|^2 = \text{sen}^2(\Omega t/2) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Notar que la probabilidad de supervivencia del estado $|\phi_1\rangle$, tiene el comportamiento $1 - (\Omega/2)^2 t^2 + \dots$, que es condición necesaria para el QZE.

En el intervalo de tiempo $0 < t < t_0$ ($t_0 \ll T = \pi/\Omega$) el estado está en una superposición coherente de los estados $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = [\cos(\Omega t/2)|\phi_1\rangle + i \operatorname{sen}(\Omega t/2)|\phi_2\rangle] \otimes |0\rangle. \quad (2.24)$$

En el instante $t = t_0$ se aplica un pulso láser muy intenso de frecuencia ω_{31} cuya duración temporal es mucho menor que π/Ω (y que t_0). La probabilidad de transición desde el nivel 1 al 3 es aproximadamente uno, por lo que el estado del sistema en t_0 es

$$|\Psi(t_0)\rangle = [\cos(\Omega t_0/2)|\phi_3\rangle + i \operatorname{sen}(\Omega t_0/2)|\phi_2\rangle] \otimes |0\rangle \quad (2.25)$$

El tiempo de decaimiento espontáneo es despreciable comparado con Ω^{-1} , por lo que “inmediatamente” el sistema cambia al estado

$$|\Psi(t_0)\rangle = \cos(\Omega t_0/2)|\phi_1\rangle \otimes |1\rangle + i \operatorname{sen}(\Omega t_0/2)|\phi_2\rangle \otimes |0\rangle \quad (2.26)$$

donde $|1\rangle$ representa un fotón en el campo de radiación y $\langle 1|0\rangle = 0$. En la ecuación (2.26) se establece una correlación entre el estado del ion y el estado del campo de radiación fluorescente, que puede considerarse análoga con la correlación que se establece entre estados cuánticos e instrumento en una medición. Sin embargo, esto no implica colapso de la función de onda ni medición porque no hay instrumentos macroscópicos involucrados.

A partir de (2.26) se deja evolucionar el sistema como antes (el pulso rf todavía está encendido porque su duración es mucho mayor que t_0) y asumimos que en $t = 2t_0$ se vuelve a aplicar el pulso óptico. El vector de estado en el intervalo $t_0 < t < 2t_0$ tiene la forma

$$\begin{aligned} |\Psi(t_0 < t < 2t_0)\rangle = & \\ & \cos(\Omega t_0/2) \left[\cos(\Omega(t-t_0)/2)|\phi_1\rangle + i \operatorname{sen}(\Omega(t-t_0)/2)|\phi_2\rangle \right] \otimes |1\rangle \\ & + i \operatorname{sen}(\Omega t_0/2) \left[\cos(\Omega(t-t_0)/2)|\phi_2\rangle - i \operatorname{sen}(\Omega(t-t_0)/2)|\phi_1\rangle \right] \otimes |0\rangle. \quad (2.27) \end{aligned}$$

En forma casi instantánea, después de aplicarse el pulso óptico en el instante $t = 2t_0$ se producen las transiciones espontáneas $|\phi_1\rangle|n\rangle \rightarrow |\phi_3\rangle|n\rangle \rightarrow$

$|\phi_1\rangle|n+1\rangle$ y el vector de estado es

$$\begin{aligned} |\Psi(2t_0)\rangle &= \cos^2(\Omega t_0/2)|\phi_1\rangle \otimes |2\rangle \\ &+ i \cos(\Omega t_0/2)\sin(\Omega t_0/2)|\phi_2\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) . \\ &- \sin^2(\Omega t_0/2)|\phi_1\rangle \otimes |1\rangle \end{aligned} \quad (2.28)$$

La probabilidad conjunta de que luego de cada uno de los dos pulsos se emita un fotón y quede en el estado fundamental, mientras que el campo de radiación queda en $|2\rangle$, es $\cos^4(\Omega t_0/2)$. La extensión a N pulsos a tiempos $t = t_0, 2t_0, \dots, Nt_0 = T$, es directa. Sean t_0 y N elegidos de tal manera que $\Omega T = \pi$, la probabilidad total de que luego de cada pulso láser haya emisión, para N pulsos, es

$$P_N(T = \pi/\Omega) = \cos^{2N} \left(\frac{\pi}{2N} \right) \quad (2.29)$$

que tiende a uno cuando $N \rightarrow \infty$.

Es necesario señalar que en su trabajo, Itano *et al.* realizaron un cálculo diferente. Por un lado, por simplicidad utilizaron la representación de coordenadas rotativas [12] y , adoptando el postulado de proyección, supusieron que después de cada medición” las coherencias (elementos no diagonales de la matriz densidad) son reseteadas a cero. Además no hicieron el cálculo directo de la probabilidad de supervivencia, sino que calcularon la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|\phi_2\rangle$ al final de los N pulsos ópticos, que siguiendo sus cálculos es

$$P_2^{(N)}(T = \pi/\Omega) = \left(\frac{1}{2} \right) [1 - \cos^N(\pi/N)], \quad (2.30)$$

que tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$. La comparación con la probabilidad de supervivencia no es directa, pero por conservación de la probabilidad total,

$$\begin{aligned} P_1^{(N)}(T = \pi/\Omega) &= 1 - P_2^{(N)}(T = \pi/\Omega) \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) [1 + \cos^N(\pi/N)]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

La expresión (2.31) tiende a uno cuando N tiende a infinito, pero, como demuestran Nakazato *et al.*[13], esta expresión incluye la probabilidad de

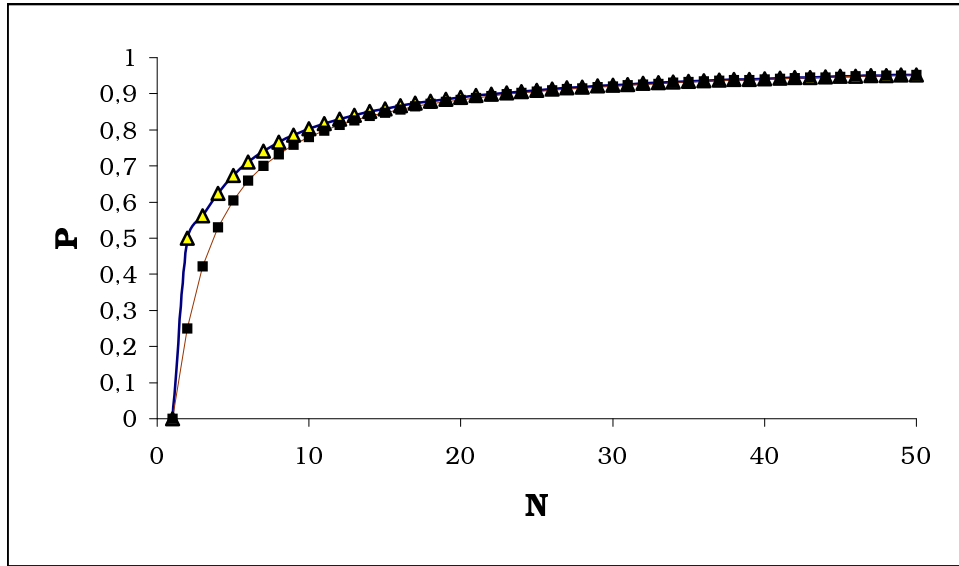


Figura 2.5: Comparación de las funciones $(1/2)[1 + \cos^N(\pi/N)]$ (triángulos) y $\cos^{2N}(\pi/2N)$ (rombos) para valores de $N = 1, 2, \dots$. Se puede ver que para valores de N pequeños ($2 \lesssim N \lesssim 10$) las diferencias son significativas.

transiciones intermedias del tipo $|\phi_1\rangle \rightarrow |\phi_2\rangle \rightarrow |\phi_1\rangle$, por lo que no representaría una probabilidad de supervivencia en el sentido dado por Misra y Sudarshan en su formulación original. Las principales diferencias son bastante notables para N pequeño (Figura 2.5). Es por esta razón y por el intento de reivindicación del postulado de proyección de von Neumann que el trabajo de Itano ha recibido casi igual número de elogios que de críticas. Nosotros adoptamos una posición neutral debido a que no es la intención de este trabajo criticar sino revisar y exponer el QZE y consideramos imposible no mencionar el trabajo de Itano tanto como no encararlo desde un punto de vista más cauteloso (cuidadoso) y, si se quiere, preciso.

2.4.2 Experimentos Propuestos

En un artículo de 1980, Peres[14] propuso un experimento prácticamente clásico que daba cuenta de la invasividad de las mediciones. Consideremos un haz de luz polarizada linealmente, pasando a través de un líquido ópticamente activo cuyo plano de polarización está rotado un pequeño ángulo α . Un anali-

zador, orientado paralelamente a la dirección de polarización original, dejará pasar una fracción $\cos^2 \alpha$ y quedará restaurada la polarización original. Si ahora introducimos un analizador idéntico en la mitad del líquido, donde la rotación es $\alpha/2$, al final encontraremos que la fracción que pasa es $\cos^4(\alpha/2)$, que es mayor que $\cos^2 \alpha$ para valores de α suficientemente pequeños. Si hubiera un número infinito de estos analizadores ideales, el plano de polarización no rotaría y ¡pasaría toda la luz!

Inspirados en este ejemplo Inagaki (ver [4] y [5]) y sus colaboradores propusieron un experimento que utiliza una serie de procesos de inversión de spin neutrónico o *spin flipper* (permutador de spin) en lugar de transiciones atómicas. Propone usar espejos magnéticos multicapas que reflejan neutrones, dejando su spin inalterado y producen descomposición espectral del estilo del experimento de Stern-Gerlach.

La figura 2.6 muestra el arreglo experimental propuesto para evaluar la ocurrencia de QZE inducido por las mediciones del spin neutrónico, usando

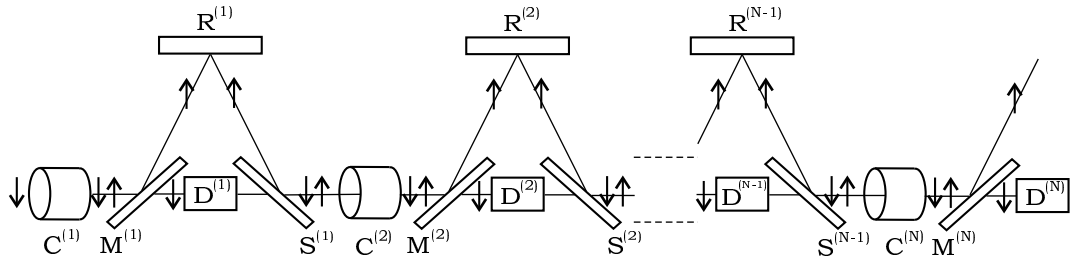


Figura 2.6: Arreglo experimental propuesto por Inagaki *et al.* para probar el QZE relacionado con las mediciones (extraído de [4]).

una serie de detectores no absorbentes² y espejos magnéticos. El neutrón se encuentra en un estado de spin $|\downarrow\rangle$ definido e incide sobre el permutador de spin $C^{(1)}$ que rota el estado de spin un ángulo θ . A la salida de $C^{(1)}$ el neutrón se encuentra en un estado de spin tipo superposición ($|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle$) y es dirigido hacia el espejo magnético $M^{(1)}$. El espejo magnético produce una descomposición espectral comparable a la que produce el campo magnético inhomogéneo en el experimento de Stern-Gerlach. Una de las componentes ($|\uparrow\rangle$) es enviada hacia el reflector $R^{(1)}$ y la otra ($|\downarrow\rangle$) hacia el detector $D^{(1)}$. Es importante destacar que el espejo magnético *no* destruye las coherencias

²Detectores de este tipo todavía no se encuentran disponibles.

entre los dos caminos. De hecho pueden volver a juntarse en $S^{(1)}$ y producir interferencia. Al salir de $S^{(1)}$ el estado es nuevamente una superposición y es dirigido hacia $C^{(2)}$. Este proceso se repite N veces. De esta forma, mientras se deja evolucionar coherentemente el estado inicial $|\downarrow\rangle$ interactuando con espejos multicapas y magnéticos, se realizan sucesivas mediciones no absorbentes en los detectores D y en el detector $D^{(N)}$ se registra la probabilidad final $P_N(\downarrow)$ de encontrar el sistema en el estado $|\downarrow\rangle$. Inagaki *et al.* calcularon que esta probabilidad para N mediciones es:

$$P_N(\downarrow) = \left(\frac{1}{2}\right) [1 + \cos^N(\pi/N)]. \quad (2.32)$$

En la ecuación (2.32) se ve claramente que $P_N(\downarrow) > P_{N-1}(\downarrow)$ para $N \geq 2$ y que $P_N(\downarrow) \rightarrow 1$ cuando $N \rightarrow \infty$. Esta característica de (2.32) y el hecho de que las intervenciones intermedias, usando detectores macroscópicos en cada etapa, dan como resultado una correlación³ no factorizable entre estados del sistema y estados del detector distinguibles macroscópicamente, implican que en verdad es una situación apropiada y testeable para la observación de QZE relacionado directamente con las mediciones. Sin embargo, persiste el problema de la realizabilidad de detectores con las características requeridas.

2.5 Discusión sobre el límite $N \rightarrow \infty$

El status de “paradójico” del QZE estuvo siempre limitado por la posibilidad de extender al límite de un continuo de mediciones ($N \rightarrow \infty$). Hace ya algunos años fue demostrado por Ghirardi, Omero, Weber y Rimini[18] que este límite es físicamente inalcanzable. Nos proponemos mostrar esto mediante un uso “ingenuo” de la relación de indeterminación entre la energía y el tiempo.

Por empezar, es necesario destacar una *imposibilidad práctica*: no es posible llevar a cabo una medición instantánea. Todas las mediciones deben tener una duración (que llamaremos δt). Esta afirmación nos lleva a deducir la *imposibilidad física*. Como límite máximo para la duración δt del proceso de medición tomamos el intervalo entre dos resultados obtenidos (lo que antes considerábamos como la medición instantánea). Las mediciones tienen lugar

³el término en inglés, utilizado en general, es *entanglement* que traducido literalmente es *maraña* o *enredo*, sin embargo no optamos por una traducción literal sino por lo que más se acerca al significado.

en los instantes $t = T/N$; $t = 2T/N$; ... ; $t = T$, por lo que consideramos que cada medición dura

$$\delta t = T/N.$$

Introduciendo, como dijimos, de forma ingenua la relación de indeterminación entre energía y tiempo, obtenemos (para el caso es $\Delta t \equiv \delta t$)

$$\Delta E \delta t = \Delta E \frac{T}{N} \geq \hbar. \quad (2.33)$$

Esta ecuación impone una cota superior al número de N de mediciones posibles,

$$N \leq \frac{\Delta E T}{\hbar}. \quad (2.34)$$

Un aumento ilimitado de N , manteniendo fijo o finito el tiempo T , produciría un aumento infinito de la indeterminación ΔE . En su trabajo Ghirardi *et al.* demuestran rigurosamente que es en realidad imposible hacer tender N a infinito sin aumentar de forma ilimitada la indeterminación de la energía. Esto tiene dos consecuencias directas. La primera es que, si $\Delta E \rightarrow \infty$, no tiene mucho sentido hablar de la preparación de un sistema en un estado inicial determinado. Y segundo, la probabilidad de supervivencia depende directamente de $(\Delta E)^2$; el que ΔE tienda a infinito implica que la expresión deducida para la probabilidad de supervivencia pierde todo sentido.

De todo lo anterior deducimos que la duración finita de cada una de las N mediciones impone una cota superior en el número de mediciones en el intervalo total, o viceversa, esto es, una cota inferior en la duración de cada medición. Por lo tanto con argumentos bastante simples hemos mostrado la imposibilidad física del (paradójico) límite $N \rightarrow \infty$.

2.6 Comentario

En esta sección hemos visto cómo la evolución de un sistema cuántico inestable, que debería decaer para tiempos mayores que la vida media, es retardada como consecuencia de la realización de sucesivas mediciones hasta el punto de frenarla completamente en el límite de un continuo de mediciones; lo que ha sido llamado Efecto Zenón Cuántico (QZE). La condición

necesaria para el QZE, que como vimos es la dependencia cuadrática con el tiempo de la probabilidad de supervivencia, a pesar de ser poco intuitiva, fue demostrada en condiciones bastante generales para tiempos suficientemente pequeños. Es decir, que se deben distinguir dos regiones: una con decaimiento cuadrático, para tiempos pequeños, donde ocurre QZE y otra con dependencia lineal o exponencial donde no ocurre QZE (hay una tercera, para $t \rightarrow \infty$, pero no la hemos estudiado). También hemos diferenciado entre dos formas diferentes de QZE: por mediciones (formulación original) y por interacciones. El primero no ha sido comprobado experimentalmente hasta ahora, pero se han propuesto experimentos con el spin neutrónico (sección 2.4.2 en la página 15) que podrían llegar a realizarse en el futuro. El segundo, ha sido holgadamente demostrado, a pesar de que algunos experimentos son cuestionados, más que nada en su interpretación y por tratar de fundamentar con ellos el postulado de proyección (sección 2.4.1 en la página 8).

Resumiendo, hemos estudiado un fenómeno que en un principio fue planteado como paradójico porque desafiaba la intuición. El fenómeno pasó de ser *paradoja a efecto* cuando se dieron cuenta de que no contradecía ningún principio y que debería ser observable. Lo que inicialmente se llamó paradoja (el límite de un continuo de mediciones) ha sido demostrado como imposible, por contradecir el principio de incertidumbre energía-tiempo[18].

En la siguiente sección estudiaremos el efecto de múltiples mediciones sobre un sistema general. Proponemos un modelo de medición que predice resultados inesperados. Además este modelo abrió el camino para el estudio de un problema matemático abierto desde un enfoque físico, como es el problema del caminante aleatorio (Apéndice A).

3 Múltiples mediciones del impulso en una partícula libre

“Everything should be made as simple as possible, but not simpler.”

Albert Einstein

3.1 Introducción

En esta sección nos proponemos estudiar las consecuencias de realizar una serie de mediciones del impulso de un sistema cuántico simple: la partícula libre (sin spin). Desde la óptica de las mediciones el sistema deja de ser tan simple porque el observable impulso P tiene espectro continuo.

Proponemos un modelo de medición que, *a priori* parecería un tanto artificioso, pero que suponemos realizable. Usaremos *como herramienta* el postulado de proyección de von Neumann (sección 3.2) porque simplifica enormemente los cálculos; por el mismo motivo usamos distribuciones de probabilidad gaussianas.

En la sección 3.3 se detalla el proceso de medición que se tomará en cuenta al momento de analizar el resultado de múltiples mediciones. Se realiza una comparación de la distribución de probabilidades inicial, en la representación de los impulsos, con la distribución final después de realizar N mediciones, según el modelo propuesto, para diferentes valores de N . Encontramos que las mediciones propuestas cambian la evolución temporal del impulso de una partícula, limitando los valores posibles que esta puede tomar y hasta prohíbe algunos valores que antes de medir tenían probabilidad considerable.

Ante el florecimiento del estudio de “efectos tipo Zenón” y de “*Quantum Zeno Dynamics*” nosotros optamos por una postura un tanto conservadora, en el sentido de que la única relación que encontramos con lo que se llama Efecto Zenón Cuántico (sección 2) es en la restricción en la evolución de un sistema debido a múltiples mediciones de algún observable. Sin embargo, uno de los puntos fundamentales del efecto Zenón no fue analizado¹ y es el

¹Este límite sí es analizado, pero desde un punto de vista matemático, en el Apéndice A

límite $N \rightarrow \infty$.

3.2 Reducción del paquete de ondas

La formulación axiomática de la mecánica cuántica, debida a von Neumann[15] y basada en gran parte en la interpretación de Copenhagen, incluye una teoría explícita de la medición cuántica. Esta teoría contiene implicaciones filosóficas que no discutiremos pero que llevaron al surgimiento de teorías e interpretaciones alternativas del problema de la medición en mecánica cuántica. Uno de los principales puntos de discusión es el *postulado de proyección* o de *reducción* de la función de onda. En su forma actual podríamos enunciar este postulado de la siguiente manera: Si sobre un sistema se realiza una medición del observable A y se obtiene como resultado un autovalor a_i (suponiendo que el espectro es discreto), entonces inmediatamente después de la medición el estado del sistema está descrito por una combinación lineal de los autoestados $|\varphi_i\rangle_j$ de A correspondientes al autovalor a_i (donde incluimos el caso degenerado). Se lo llama postulado de proyección porque *proyecta* el estado inicial sobre el subespacio generado por los autovectores del autovalor a_i . Para el caso de observables con espectro continuo, que no tienen autovectores (por ejemplo, la posición X o el impulso P) debemos modificar esta formulación: si una medición de un observable con espectro continuo B sobre el sistema cuyo estado inicial es $|\psi\rangle$, ha dado como resultado un valor β , que se encuentra en un intervalo δ de la recta real, entonces el estado $|\psi'\rangle$ del sistema inmediatamente después de la medición está descrito por

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\psi|E_\delta|\psi\rangle}} E_\delta|\psi\rangle, \quad (3.1)$$

donde E_δ es el proyector representado por

$$E_\delta = \int_{-\infty}^{\infty} dp \chi_\delta(p) |p\rangle\langle p|, \quad (3.2)$$

y donde χ_δ es la función característica definida de la siguiente manera:

$$\chi_\delta = \begin{cases} 1 & \text{para } p \in \delta \subset \mathbb{R} \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Dejaremos de lado toda dificultad o discención filosófica y adoptaremos, sólo por conveniencia, una postura utilitarista. Es decir, para hacer las cuentas relacionadas con el modelo que proponemos, suponemos válido el postulado de proyección. Esto no implica que, en un caso eventual, la realización de algún experimento relacionado con el modelo pueda esgrimirse como demostración concluyente de la validez del postulado. Como vimos en la sección 2 siempre será posible llegar a las mismas conclusiones mediante “procesos puramente dinámicos”.

3.3 Descripción del Modelo

Realizaremos una serie de N mediciones del impulso sobre un sistema cuántico. En particular tomamos una partícula libre unidimensional con hamiltoniano $H = P^2/2m$. El sistema a estudiar estará preparado en un estado inicial $|\psi_0\rangle$ tal que su función de onda en la representación de los impulsos ($\psi_0(p) = \langle p | \psi_0 \rangle$) sea una gaussiana

$$\psi_0(p) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{\sigma_0}} \exp\left(-\frac{p^2}{4\sigma_0^2}\right) \quad (3.4)$$

con valor medio $\langle P \rangle_0 = 0$ y desviación estándar (indeterminación) σ_0 . La simplicidad de la extensión a cualquier valor de $\langle P \rangle_0$ se hará evidente más adelante. La probabilidad de encontrar a la partícula con un impulso en un intervalo $[p, p + dp]$ en el espacio de los impulsos es

$$\begin{aligned} dP(p) &= |\langle p | \psi_0 \rangle|^2 dp \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma_0^2}\right) dp. \end{aligned} \quad (3.5)$$

El modelo consiste en suponer que el proceso de medición consta de dos etapas. En la primera, de acuerdo con la teoría cuántica estándar, utilizamos un proyector adecuado para verificar si la partícula tiene un impulso mayor que el valor medio. Si el resultado es positivo (es decir $p > \langle P \rangle_0$) la función de onda ψ' que llamamos intermedia (antes de la segunda etapa), tiene la forma

$$\psi' = \psi_0 \Theta(p), \quad (3.6)$$

donde $\Theta(p)$ es la función escalón de Heaviside. Si no encontramos a la partícula con impulso mayor que el valor medio (resultado negativo), entonces la función de onda intermedia es

$$\psi' = \psi_0 \Theta(-p). \quad (3.7)$$

(Ver Figura (3.1)).

Observar que a pesar de obtener un resultado negativo, de todas formas obtenemos información del sistema.

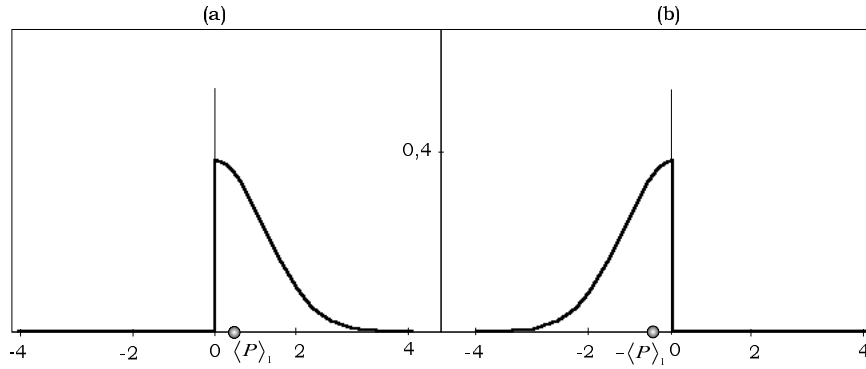


Figura 3.1: Etapa intermedia de la medición: (a)Resultado positivo ($p > 0$); (b)Resultado negativo ($p < 0$). Para esta figura se tomó $\sigma_0 = 1$.

Los estados obtenidos en esta etapa (media gaussiana hacia la izquierda o la derecha) tienen valor medio dado por

$$\langle P \rangle_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_0^{\infty} p \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma_0^2}\right) dp & = +\frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{-\infty}^0 p \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma_0^2}\right) dp & = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}, \quad (3.8)$$

donde hemos separado los dos posibles resultados (Ver la Figura 3.1). Además la desviación estándar es igual para los dos resultados y toma el valor

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \langle P^2 \rangle_1 - \langle P \rangle_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_0^{\infty} p^2 \exp\left(-\frac{p^2}{2\sigma_0^2}\right) dp - \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \\ &= \frac{\sigma_0^2}{2} - \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}}\right)^2, \end{aligned}$$

esto es

$$\sigma_1 = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi - 1}{2\pi}}. \quad (3.9)$$

La segunda etapa consiste en que el aparato “restaura” la función de onda, dejándola nuevamente con forma gaussiana pero con el valor medio calculado en (3.8) y la indeterminación calculada en (3.9)(Fig.3.2). Al finalizar la primer medición el estado del sistema será $|\psi_1\rangle$, correspondiente a una función de onda

$$\begin{aligned} \langle p | \psi_{1\pm} \rangle &= \psi_1(p) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{\sigma_1}} \exp\left(-\frac{(p \mp \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}})^2}{4\sigma_1^2}\right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

En (3.10) el símbolo \pm se usa para distinguir los dos posibles estados que

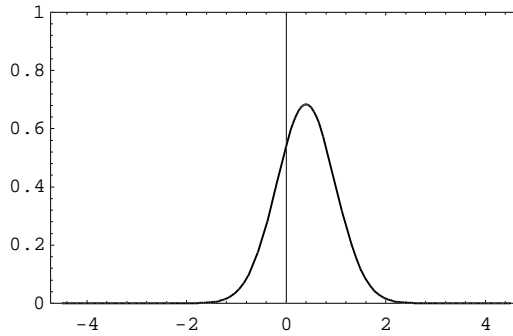


Figura 3.2: En esta figura se muestra la amplitud de probabilidad $|\langle p | \psi \rangle_1|^2$ “restaurada” después de la primer medición, en el caso de que p medido sea mayor que cero (2ª etapa). Tomamos $\sigma_0 = 1$

pueden obtenerse como resultado de la medición. Antes de continuar queremos aclarar que la segunda etapa, de restauración, en el proceso de medición fue ideada con el motivo de simplificar el cálculo analítico y poder lograr una expresión iterativa simple de las sucesivas proyecciones. No es una característica esencial del problema y no representa una restricción física significativa.

Teniendo en cuenta los pasos seguidos en la primer medición, por recurrencia podemos calcular el valor medio $\langle P \rangle_2$ para la segunda medición

$$\begin{aligned}\langle P \rangle_2 &= \pm \langle P \rangle_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_0 \left(\pm 1 \pm \sqrt{\frac{\pi-1}{2\pi}} \right),\end{aligned}\quad (3.11)$$

y

$$\sigma_2 = \sigma_1 \sqrt{\frac{\pi-1}{2\pi}} = \sigma_0 \left(\sqrt{\frac{\pi-1}{2\pi}} \right)^2. \quad (3.12)$$

Como se deduce de (3.11), luego de la segunda medición hay $4 = 2^2$ estados posibles. Esto sugiere una extensión al caso de N mediciones. Siguiendo el razonamiento anterior, después de N mediciones habrá 2^N estados igualmente posibles (cada uno con probabilidad $1/2^N$) con sus correspondientes 2^N valores medios diferentes, calculados por recurrencia, dados por

$$\langle P \rangle_N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma_0 (\pm 1 \pm s \pm s^2 \pm \dots \pm s^{N-1}), \quad (3.13)$$

donde $s = \sqrt{(\pi-1)/2\pi}$, y la desviación estándar

$$\sigma_N = \sigma_0 \left(\sqrt{\frac{\pi-1}{2\pi}} \right)^N. \quad (3.14)$$

(Desde ahora, a no ser que se aclare específicamente, $\sigma_0 = 1$.) Los resultados de las sumas en (3.13) dan cuenta de las 2^N posibles ordenaciones para una lista de N elementos cuyos valores son 1 o -1 . Utilizaremos una representación que resulta útil, especialmente en el cálculo (numérico) de los valores; definimos la matriz χ que llamaremos *matriz de signos*. Las filas de la matriz de signos son las 2^N configuraciones diferentes para una lista de longitud N , cuyos elementos son 1 y -1 (signos), y en las que importa el orden. Para

$N = 3$ la matriz de signos es

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Multiplicando la matriz de signos por el vector $(1/\sqrt{2\pi})\{1, s, s^2, \dots, s^{N-1}\}$ se obtiene un *conjunto* de valores que llamaremos $\{P_I(N)\}$; sus 2^N elementos son todos los posibles valores medios del impulso de la partícula libre después de N mediciones

$$P_I(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{I,k} s^k, \quad (3.16)$$

donde $\chi_{I,k}$ es el elemento de la fila I y la columna k de la matriz $\boldsymbol{\chi}$. Este conjunto tiene una cota superior P_{max} (e inferior P_{min}) que corresponde al caso en que todos los signos son positivos (y negativos)

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-s^N}{1-s} = P_{min} \leq P_I \leq P_{max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-s^N}{1-s}. \quad (3.17)$$

Por la forma en que fue definido el proceso de medición, cada uno de los estados finales posibles estará representado por un vector $|\psi_{N,I}\rangle$ con distribución gaussiana (en la representación de los impulsos) cuyo valor medio será P_I y su desviación estándar σ_N . En la sección 3.4 veremos entre otras cosas por qué es interesante destacar la existencia de cotas para los valores posibles de P_I .

3.4 Resultados

En esta sección expondremos los resultados que predice el modelo propuesto. Tal y como está planteado puede imaginarse como una sucesión de experimentos de doble rendija. En cada paso se va dividiendo en dos cada uno de

los “frentes de ondas” resultantes. La diferencia con el experimento típico es que en cada paso se está tratando de determinar por cuál rendija pasó (medición) con el consecuente colapso y destrucción de los efectos de interferencia. Por eso la densidad de probabilidad, después del N -ésimo paso, en lugar de ser el módulo al cuadrado de la suma de las amplitudes

$$dP_N = \left| \sum_{i=1}^{2^N} \langle p | \psi_i \rangle \right|^2 dp, \quad (3.18)$$

es la suma de los módulos al cuadrado de las amplitudes, es decir la suma de las densidades de probabilidad

$$dP_N = \sum_{i=1}^{2^N} |\langle p | \psi_i \rangle|^2 dp. \quad (3.19)$$

Esto implica que la función de distribución de probabilidades para el impulso después de N mediciones está dada por la suma de las 2^N gaussianas correspondientes a cada uno de los valores del conjunto $\{P_I(N)\}$, divididas por 2^N que es el factor de normalización. En la figura 3.3 se comparan las distribuciones obtenidas para distintos valores de N con la distribución gaussiana inicial. Tomamos solamente cuatro valores de N (pequeños), porque a medida que aumenta el valor de N se hace cada vez más complejo, y largo, el cálculo y la realización de los gráficos (recordar que hay que sumar 2^N funciones gaussianas diferentes). Se puede sortear este obstáculo mediante la siguiente aproximación: para N suficientemente grande es razonable considerar a las gaussianas como “barras” de altura $1/2^N$ y base σ_N que es equivalente a hacer un histograma². En el Apéndice A analizamos en profundidad los casos para N “grande” y el límite $N \rightarrow \infty$.

Para analizar los gráficos y poder sacar conclusiones debemos recordar dos características fundamentales de la distribución: la primera es que los valores medios posibles están acotados, o mejor dicho, están todos dentro del intervalo

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-s^N}{1-s}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-s^N}{1-s} \right]$$

²De todas formas el valor máximo de N soportado por el programa utilizado es de 19, es decir una columna de 524288 datos.

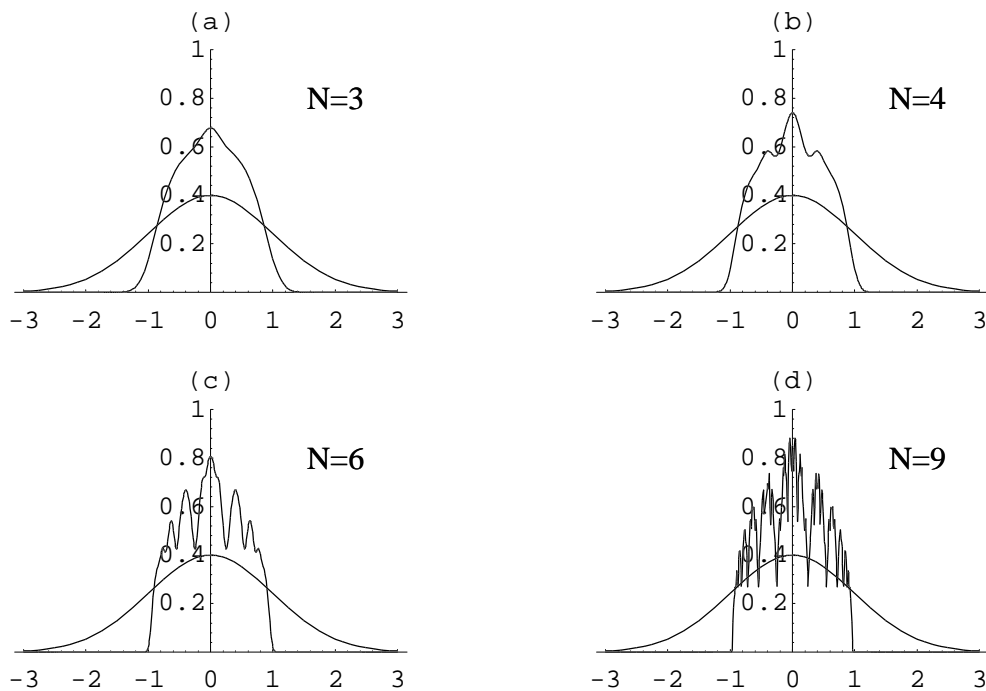


Figura 3.3: Comparación de la distribución gaussiana inicial con las distribuciones para diferentes números de mediciones. (a) $N = 3$, (b) $N = 4$, (c) $N = 6$, (d) $N = 9$. Se puede apreciar la disminución en la probabilidad para valores de p grandes y el aumento de la probabilidad para valores pequeños.

que está incluido en

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-s}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1-s}\right] = [-0.95858, 0.95858];$$

la segunda es que la desviación estándar es s^N , con $s < 1$, por lo que es cada vez más pequeña. Así se explica por qué para $|p| \gtrsim 1$ la probabilidad es prácticamente nula para cualquier valor de N mientras que en una distribución gaussiana con valor medio cero y desviación estándar uno (distribución que tomamos como inicial o no perturbada), la probabilidad de que el valor absoluto del impulso p sea mayor que uno es 0,318 ($\neq 0$). La diferencia es por lo menos significativa.

Las figuras expuestas y las deducciones obtenidas a partir de ellas, nos permiten afirmar que el modelo propuesto para la medición del impulso de

una partícula libre predice, en el caso de múltiples mediciones, una disminución de la probabilidad de medir un impulso mayor que cero y en particular, y peculiar, la (casi) completa anulación de la probabilidad de obtener como resultado $p > 1$. El confinamiento a una zona limitada en cuanto a los impulsos posibles nos lleva a pensar en una especie de restricción de la evolución de el sistema que, ciertamente no tiene nada de paradójico dada la arbitrariedad de la forma de medir y la invasividad característica de la medición en mecánica cuántica, pero nos remite a efectos tipo Zenón (QZE). La analogía no es directa y no cuadra dentro de lo que algunos autores denominan *Quantum Zeno Dynamics*[16], pero sí es un efecto singular predicho por la teoría que creemos que debería poder observarse. Sin embargo, y como afirmamos antes, la eventual realización y comprobación de estos resultados no debe ser tomada como demostración del postulado de proyección, que fue utilizado como un mero instrumento para simplificar los cálculos, porque se puede llegar a las mismas conclusiones mediante evoluciones unitarias y descomposiciones espectrales (aunque posiblemente el “modelo” cambie su formulación de manera radical).

Por último analizaremos brevemente la formación de zonas de máxima y mínima probabilidad que se hacen más evidentes en la figura 3.3.(d), y la estructura interna de estas zonas. El proceso de medición presentado involucra

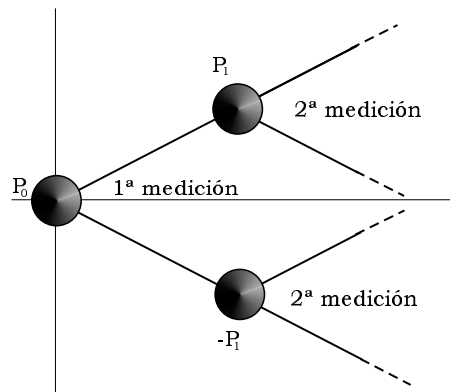


Figura 3.4: Representación tipo espacio-tiempo (árbol) del comienzo del proceso de medición.

dos resultados posibles en cada paso (en ese sentido no es muy diferente a una sucesión de experimentos de Stern-Gerlach). Es usual representar este tipo de sucesiones de mediciones mediante diagramas tipo espacio-tiempo o de árbol

(figura 3.4) La figura 3.5 muestra el árbol correspondiente a $N = 10$ super-

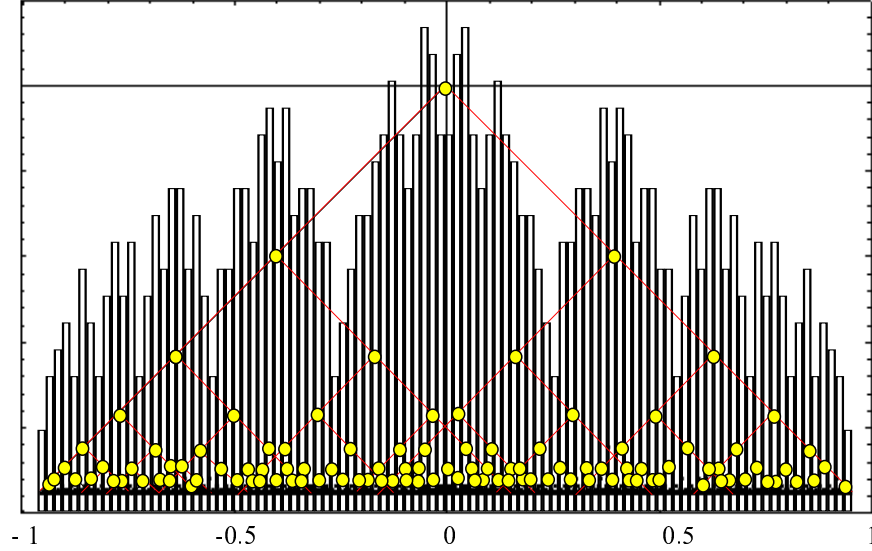


Figura 3.5: Superposición de un árbol sobre un histograma para $N = 10$. Se ve que los picos corresponden a un nuevo árbol generado a partir de una semilla secundaria. A la vez dentro de cada pico aparecen nuevos picos a partir de semillas terciarias, etc.

puesto sobre el histograma generado para $N = 10$; para N suficientemente grande, el histograma es equivalente al gráfico de la función de densidad. Cada punto o “posición” alcanzada luego de $m < N$ mediciones puede ser considerada como el punto de partida de un nuevo proceso, pero escalado en un factor s^m . Para ver esto separamos la suma de la ecuación 3.16 en dos partes: una hasta la potencia s^{m-1} y en la segunda parte sacamos factor común s^m . Esta característica se hace más clara en los diagramas espacio-temporales donde cada punto es el punto de partida de otro árbol igual pero con su tamaño reducido. Como consecuencia, la repetición de patrones genera autosimilaridad en la distribución final de los $\{P_I\}$. Veremos en el Apéndice A que, en un tratamiento general, la distribución de valores finales depende fuertemente de s . El caso particular del modelo propuesto, $s \simeq 0,58$, cae dentro de lo que hemos llamado *autosimilaridad solapada*. En el histograma de la figura 3.5 vemos en la región central una zona de acumulación o *cluster* causada específicamente por la superposición de los conjuntos de valores cuyo primer signo fue positivo con aquellos cuyo primer

signo fue negativo. Después de la primer medición puede aplicarse el mismo razonamiento y aparecen dos nuevos *clusters* pero ahora centrados en $\pm\langle p_1 \rangle$. Generalizando, esperamos encontrar el centro de un *cluster* a una distancia $(1/\sqrt{2\pi})(1-s^n)/(1-s)$, donde $n = 1, 2, \dots, N$. Aún más, cada punto dentro de un *cluster* puede considerarse como el punto de partida de otro *cluster*. Por lo tanto, si el proceso se repitiera indefinidamente, tendríamos infinitas formaciones de *clusters* dentro de *clusters* cuya forma es bastante poco intuitiva.

3.5 Comentario

Con el propósito de estudiar los efectos de realizar múltiples mediciones sobre un sistema cuántico, no necesariamente inestable, se propuso un modelo *de juguete* de medición del impulso, apoyado en el postulado de proyección de von Neumann. A partir del modelo se predice una restricción en la evolución del sistema diferente al QZE.

El modelo es bastante ficticio (como dijimos, de juguete) y a pesar de que no es descabellado pensar que se puede hacer un experimento que reproduzca las condiciones, reconocemos que sería muy forzado medir de esa manera. Pero asumimos, *a priori* que se puede llevar a cabo. Coincidimos con Einstein cuando dice que

Of course, every theory is true, provided you suitably associate its symbols with observed quantities³[1].

Por supuesto, podría llegar a ser interesante observar que la probabilidad de encontrar a la partícula con impulso fuera de un intervalo dado, después de varias mediciones, es nula y, más que nada la formación de los picos de probabilidad dentro del intervalo.

Sin embargo, consideramos que lo más importante que se ha derivado de este modelo es el problema matemático en sí, que plantemos en el Apéndice A, donde se relaciona el modelo con un caminante aleatorio con paso variable y se explican la formación de estructuras, así como los diferentes comportamientos para diferentes valores del parámetro s .

³“Por supuesto, toda teoría es verdadera siempre y cuando se asocien apropiadamente sus símbolos con cantidades observadas”

4 Conclusión

En este trabajo hemos estudiado cómo afecta a un sistema, u objeto observado, realizar una sucesión de mediciones en intervalos de tiempo regulares. En la sección 2 hicimos una *revisión* del Efecto Zenón Cuántico (QZE) que inhibe la evolución temporal de sistemas inestables cuando son “observados” repetidas veces (múltiples mediciones). En el límite, matemático, de un continuo de mediciones, hemos visto que la teoría predice el *congelamiento* del sistema en su estado inicial, aunque la realizabilidad de este límite ha sido puesta en duda con argumentos tales como la violación del principio de indeterminación. También se dejaron en claro las condiciones para observar el QZE. Principalmente, la aparentemente poco intuitiva dependencia con t^2 de la probabilidad de decaimiento (para tiempos pequeños) fue deducida para casos generales de sistemas inestables (secciones 2.2 y 2.3). Además hemos diferenciado entre QZE inducido por interacciones, que ha sido observado por primera vez en el experimento de Itano *et al.*[9], y el QZE debido propiamente a las mediciones. Paradójicamente, este último responde a la formulación original pero aún no ha sido observado. También hemos descrito el experimento propuesto por Inagaki *et al.* que involucra una sucesión de mediciones del spin neutrónico. El único problema es que hay componentes necesarias que aún no existen.

En la sección 3 hemos propuesto un modelo teórico de mediciones sucesivas del impulso de una partícula libre con distribución gaussiana en la representación de los impulsos. El modelo es artificial pero predice comportamientos inesperados que podrían llegar a considerarse, hasta cierto punto, como una variación del QZE en cuanto a que, según hemos visto en la sección 3.4, de alguna manera se restringe la evolución del sistema. Pero hasta ahí llega la relación porque se podría argumentar justamente que la distribución de impulsos no depende del tiempo en una partícula libre. Sin embargo, la restricción de la que hablamos es otra; hay impulsos mayores que cero con una probabilidad considerable antes de medir y esta probabilidad se reduce a cero luego de las mediciones, causando una especie de “freno” efectivo.

En el Apéndice A, a partir del modelo (de juguete) propuesto y de los tipos de distribuciones obtenidas establecimos una relación entre estas y los caminos diferentes de un caminante aleatorio pero con paso variable. En-

contramos que la distribución de posiciones finales depende fuertemente del valor del *step factor* s ; identificamos dos zonas principales: $0 < s < 1/2$ y $1/2 < s < 1$. En la primera la distribución es fractal y el proceso es retrodictivo y en la segunda la distribución muestra autosimilaridad solapada. Además existe un conjunto infinito numerable de puntos en la segunda zona que tiene distribución perfectamente suave, pero también existe un conjunto de valores de s para los que no existe distribución. Dado que es un problema abierto esperamos motivar un progreso posterior en este tema.

A Apéndice:

Caminante aleatorio con paso exponencialmente variable

(Este apéndice es un resumen de un trabajo de A. C. de la Torre, A. Maltz, H. Martín, P. Catuogno, y I. García-Mata, enviado a *Physical Review E*.)[19]

A.1 Introducción

El modelo propuesto en la sección 3 para sucesivas mediciones sobre una partícula libre deriva en un problema matemático subyacente de una complejidad y riqueza inesperadas. Debido a la naturaleza dicotómica del resultado de las mediciones (es básicamente un experimento con resultado si/no), podemos hacer una analogía con la ‘decisión’ que toma en cada paso un caminante aleatorio RW (*Random Walker*) pero incluyendo la variación en el paso que hace que la difusión (o paseo del caminante) sea amplificada o amortiguada, según el *step factor* s sea mayor o menor que uno respectivamente. El conjunto de valores $\{P_I(N, s)\}$ de la sección 3.3 en este caso representa todas las posibles posiciones finales, por eso desde ahora lo llamaremos $\{X_I\}$, y está definido por (omitimos de aquí en más la dependencia con N y con s)

$$X_I = \sum_{k=0}^{N-1} \chi_{I,k} s^k, \quad (\text{A.1})$$

y las sumas de la ecuación (3.13) de la página 24 representan todos los caminos posibles, es decir los 2^N caminos correspondientes a N pasos. En los caminantes aleatorios típicos el caminante decide dar un salto de longitud l hacia la derecha o hacia la izquierda. En nuestro caso ese salto sería de longitud $l s^i$ para el i -ésimo paso. De aquí en más consideraremos $l = 1$ excepto en la sección A.3.

Cabe recordar que el conjunto $\{X_I\}$ esta acotado por ambos lados

$$-\frac{1-s^N}{1-s} \leq X_I \leq \frac{1-s^N}{1-s}. \quad (\text{A.2})$$

Llamamos a esta representación *cuadro centrado*. Por otro lado, definimos la representación que llamaremos *cuadro desplazado* definida por el conjunto de valores

$$Y_I = \sum_{k=0}^{N-1} b_{I,k} s^k, \quad (\text{A.3})$$

donde $b_{I,k} = (\chi_{I,k} + 1)/2 = 0$ ó 1 . La diferencia con el proceso centrado es que en el i -ésimo paso el RW elige dar un paso de longitud s^i a la derecha o quedarse en el lugar. Así, el conjunto de valores tendrá como máximo el mismo valor $(1 - s^N)/(1 - s)$, pero su cota inferior será el cero.

A.2 Características generales

En el cuadro desplazado es fácil encontrar una relación entre los conjuntos de posiciones finales después de N y $N + 1$ pasos. Luego de N pasos, tenemos dos alternativas: $b = 0$ y obtenemos el mismo conjunto, o $b = 1$ y se genera un nuevo conjunto simplemente sumando s^N a cada uno de los elementos. Por lo tanto, tenemos

$$\{Y_I(N + 1)\} = \{Y_I(N)\} \cup \{Y_I(N) + s^N\}. \quad (\text{A.4})$$

La relación correspondiente en el cuadro centrado es

$$\{X_I(N + 1)\} = \{X_I(N) \pm s^N\}. \quad (\text{A.5})$$

Es conveniente, en el cuadro desplazado, definir una cantidad G_{N+1} (*gap*) como la diferencia entre el menor elemento del segundo conjunto y el mayor del primer conjunto en la ecuación (A.4),

$$G_{N+1} = s^N - \frac{1 - s^N}{1 - s}. \quad (\text{A.6})$$

Para $s \geq 2$, el *gap* es siempre positivo, monótonamente creciente con N y aparecen patrones de autosimilaridad porque, de un paso al otro, se crea el mismo conjunto de puntos, pero desplazado una cantidad suficiente como para que los dos conjuntos estén separados. Además, siempre para $s \geq 2$, G_N es la máxima separación entre dos puntos y para valores grandes de N , diverge como s^{N-1} . Para valores de s menores que la raíz de $s^N(s-2)+1 = 0$,

el *gap* es negativo y los dos conjuntos en (A.4) se solapan de manera que la autosimilaridad *estricta* queda destruida. Sin embargo, en la mayor parte de los casos, el solapamiento no borra por completo la característica repetitiva de la autosimilaridad. Llamamos *autosimilaridad solapada* a la autosimilaridad residual que el solapamiento no alcanza a borrar por completo.

Dividiendo X_I o Y_I por s^{N-1} hallamos que existe una simetría $s \rightarrow 1/s$. Esto es,

$$\left\{ \frac{X_I(N, s)}{s^{N-1}} \right\} = \left\{ X_{I'}(N, \frac{1}{s}) \right\}. \quad (\text{A.7})$$

(Las ordenaciones I e I' en estos conjuntos no son necesariamente iguales). La simetría es útil porque todo lo que probamos para $s > 1$ puede ser usado para llegar a alguna conclusión para $s < 1$ y viceversa. Como ejemplo consideramos el caso $s = 2$, entonces

$$Y_I = \sum_{k=0}^{N-1} b_{I,k} 2^k, \quad b_{I,k} = 0 \text{ o } 1. \quad (\text{A.8})$$

Esta es la expansión en base 2 de todos los enteros I , siempre que elijamos la ordenación de la matriz $b_{I,k}$ tal que $Y_I = I$. Por lo tanto, el conjunto $\{Y_I(N, 2)\}$ contiene a todos los enteros $0, 1, 2, \dots, 2^N - 1$ distribuidos uniformemente. De la simetría $s \rightarrow 1/s$ concluimos que el conjunto $\{Y_I(N, 1/2)\}$ tiene 2^N valores uniformemente distribuidos entre 0 y $(2^N - 1)/2^{N-1}$.

De la sección 3.4 y de las ecuaciones (A.1) y (A.3) deducimos a partir de cada posición alcanzada se genera un “nuevo” proceso pero escaleado en un factor dependiendo del número de pasos realizados. Esta característica se observa claramente en los diagramas de árbol. Estas repeticiones generan autosimilaridad o autosimilaridad solapada como veremos en la sección siguiente

Analizando los momentos de la distribución de posiciones finales en el cuadro centrado vemos que el primer momento es cero. De la ecuación (A.5) y considerando que después de N pasos todas las posiciones finales tienen igual probabilidad ($1/2^N$), podemos derivar una relación de recurrencia para el segundo momento,

$$\langle X^2 \rangle_{N+1} = \langle X^2 \rangle_N + s^{2N}, \quad (\text{A.9})$$

que iterando da como resultado

$$\sigma^2 = \langle X^2 \rangle_N = \sum_{k=0}^{N-1} s^{2k} = \frac{1 - s^{2N}}{1 - s^2}. \quad (\text{A.10})$$

Para $s < 1$ la desviación estándar es constante para valores de N grandes,

$$\sigma^2 \rightarrow \frac{1}{1 - s^2}.$$

Si $s > 1$ diverge como s^{2N} y para $s = 1$ crece como N , como se espera para un RW estándar. El valor $s = 1$ separa dos comportamientos diferentes. Por un lado ($s < 1$) tenemos *difusión amortiguada* dentro de un dominio acotado, y por otro lado ($s > 1$) tenemos *difusión amplificada* en una región no acotada. En general todos los momentos pueden obtenerse a partir de la función generadora de momentos como

$$\langle X^r \rangle_N = \left. \frac{1}{i^r} \frac{d^r \phi_N(u)}{du^r} \right|_{u=0}, \quad (\text{A.11})$$

donde

$$\phi_N(u) = \sum_{l=0}^{2^N-1} \frac{1}{2^N} \exp(i u X_l) = \prod_{k=0}^{N-1} \cos(us^k) \quad (\text{A.12})$$

que implica la relación de recurrencia

$$\phi_{N+1}(u) = \cos(u) \phi_N(su). \quad (\text{A.13})$$

A.3 Dependencia con el *step factor*. Fractalidad, autosimilaridad solapada y densidades suaves

Una característica interesante del proceso para $s \geq 2$, y por lo tanto también para $s \leq 1/2$ es que es *retrodictivo*, en el sentido de que una dada posición final puede ser alcanzada por sólo un camino, es decir, por sólo una combinación de coeficientes $\sigma_{I,k}$ o $b_{I,k}$. Esto puede verse claramente en el cuadro

desplazado, porque para $s \geq 2$ la ecuación (A.4) representa la expansión de un número en la base s y, por supuesto, los “dígitos” $b_{l,k}$ son únicos.

De la afirmación anterior deducimos que el conjunto de posiciones finales para valores de s en $(0, 1/2) \cup (2, \infty)$ es fractal, para $N \rightarrow \infty$, porque corresponde a la expansión de números en una base, pero tomando *solamente* los dígitos 0 y 1 y excluyendo a todos los demás. El ejemplo más conocido es, cuando $s = 1/3$, el conjunto de Cantor. Es fácil encontrar la dimensión fractal D utilizando la “definición”¹ de la misma en procesos de crecimiento

$$M \sim L^D, \quad (\text{A.14})$$

donde M es la masa (o número de puntos finales) y L representa el tamaño. Cuando N pasa a $N + 1$, en el cuadro desplazado, tenemos que la masa M aumenta al doble y el tamaño pasa a ser $L(1 - s^{N+1})/(1 - s^N)$. Para $N \rightarrow \infty$ es fácil demostrar que $D = \ln 2 / \ln s$. Por tener estructura fractal, la distribución de posiciones finales para s fuera del intervalo $[1/2, 2]$ no puede ser descrita por una función de densidad continua porque habrá “agujeros” de todos los tamaños inalcanzables por el RW. Cuando $s > 2$, el *gap* G_N (que en este caso representa el agujero más grande) crece como s^{N-1} . Aún reescalando el espacio unidimensional dividiéndolo por el ancho de la distribución $\sigma \approx s^N$, todavía encontraremos agujeros de tamaño finito $1/s$. Resumiendo, para s fuera del intervalo $[1/2, 2]$ el proceso es retrodictivo, tiene estructura fractal y no tiene límite continuo.

El caso $s \in [1/2, 2]$ es un problema matemático abierto. Como se dedujo en la sección A.2 analizando el *gap*, en este intervalo el conjunto de posiciones finales muestra autosimilaridad solapada y encontrar la distribución es un problema en extremo complicado. Sin embargo, para algunos casos encontramos resultados. Por supuesto, el caso más conocido y estudiado es $s = 1$, distribución binomial que se hace gaussiana en el límite $N \rightarrow \infty$ y $l \rightarrow 0$, manteniendo constante $\sigma = \sqrt{N}l$. Vimos que para $s = 2$, y por simetría también para $s = 1/2$, la distribución es uniforme. En general, solo necesitamos considerar el intervalo abierto $(1/2, 1)$ dado que la simetría mencionada permite extender los resultados al resto del intervalo.

Resolver el problema cuando $N \rightarrow \infty$ en la misma forma que se hizo para $s = 1$ resulta imposible porque, para $s < 1$, el ancho de la distribución, $\sigma^2 \simeq l^2/(1 - s^2)$, es constante para N grande y por lo tanto colapsaría a cero

¹no tomaremos en cuenta la definición matemáticamente rigurosa

en el límite $l \rightarrow 0$. La solución conocida para $s = 1$ no nos sirve; no puede ser extrapolada a ningún valor de s distinto de 1.

En cambio, la existencia de función densidad para $s = 1/2$ y $N \rightarrow \infty$ puede ser usada para derivar una solución para un conjunto infinito numerable de valores de s que también poseen función densidad. Por ejemplo, consideremos el valor $s = 1/\sqrt{2}$. Separando las sumas en sus partes con potencia par e impar, tenemos

$$X_I(\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sum_{k \text{ par}}^{\infty} \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k + \sum_{k \text{ impar}}^{\infty} \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k. \quad (\text{A.15})$$

Sacando factor común $1/\sqrt{2}$ de la parte con potencias impares quedan dos sumas sobre las potencias pares que si redefinimos el índice ($k/2 \rightarrow k$) resultan en

$$X_I(\infty, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \pm \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \pm \left(\frac{1}{2}\right)^k. \quad (\text{A.16})$$

Vemos que las dos sumas corresponden al proceso para $s = 1/2$ y por lo tanto la variable aleatoria $X_I(\infty, \frac{1}{\sqrt{2}})$ es la suma de dos variables aleatorias con función de densidad conocida (uniforme)

$$X_I(\infty, 1/\sqrt{2}) = X_{I'}(\infty, \frac{1}{2}) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) X_{I''}(\infty, \frac{1}{2}). \quad (\text{A.17})$$

La función de densidad resultante es la convolución de dos distribuciones de densidad uniformes. Este resultado puede ser generalizado para $s = 1/\sqrt[n]{2}$ dando como resultado la convolución de n funciones de densidad distribuidas uniformemente. En el límite $n \rightarrow \infty$ estas múltiples convoluciones se aproximan a una distribución gaussiana, como se esperaba ya que $1/\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$ para $n \rightarrow \infty$.

Hemos visto que en el intervalo $[1/2, 2]$ el comportamiento de la distribución en función de s es lo que llamamos autosimilaridad solapada excepto en un conjunto infinito numerable de puntos (que en definitiva es de medida nula). Además para todos los s dentro del intervalo $[1/2, 1]$, el proceso *no* es retrodictivo y se puede demostrar que para $2/3 < s < 1$ existen infinitos caminos posibles para cada punto de llegada[19].

También puede demostrarse que existen un conjunto (infinito numerable) de valores de s en el intervalo $[1/2, 1]$ tal que para algunos puntos de llegada hay acumulación de caminos. Para estos casos *no existe* función de distribución.

A.4 Agregado computacional

El modelo físico descrito en la sección 3 junto con el problema matemático tratado en este apéndice requirieron del desarrollo de un pequeño programa para obtener los valores posibles (del impulso en la sección 3 y las posiciones finales en el caminante aleatorio). La principal razón es que la cantidad de valores finales posibles va como 2^N y se vuelve imposible el cálculo “a mano”. Pero cualquier manera, se puede utilizar la simplicidad de la forma iterativa que resulta del modelo.

Para obtener las tablas de valores correspondientes para diferentes valores de N y del *step factor* s debimos familiarizarnos con el lenguaje de programación *FORTRAN 90* y como veremos con algún “truco” quizás no muy conocido.

El problema (el mismo en los dos casos) consiste en generar la matriz de signos χ y multiplicarla por el vector

$$\{1, s, s^2, \dots, s^N\}.$$

Como se vio en la sección 3.3 la matriz de signos es una matriz de N columnas por 2^N filas. Las filas son todas las posibles ordenaciones de 1 y -1 , comenzando por la fila

$$1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1$$

hasta la fila

$$-1 \ -1 \ \dots \ -1.$$

Lo que nos ayudó a construir de una manera práctica y rápida esta matriz fue la idea del desarrollo en base binaria que surge del cuadro desplazado (Ecuación A.8 en la página 35), donde las filas de la matriz $b_{I,k}$ cuyos elementos son 1 y 0 son a la vez la representación en base binaria de los números enteros desde 0 hasta $2^N - 1$. La *función intrínseca elemental* IBITS de *FORTRAN* extrae una secuencia de bits de cualquier patrón de bits. La función tiene como argumento el número entero (que para la máquina constituye un patrón de bits), una posición dentro de ese patrón y una longitud que para nosotros siempre es 1. Utilizando esta función y un doble loop se genera fácilmente la matriz $b_{I,k}$ (recordar que $\chi_{I,k} = 2 b_{I,k} - 1$). Una vez construida la matriz, se multiplica por el vector $\{1, s, \dots, s^N\}$ previamente generado.

Para esto también usamos una función intrínseca elemental: MATMUL. Los argumentos de esta función son las dos matrices a multiplicar y hay que asegurarse que las dos matrices pueden multiplicarse entre sí. El resultado es un vector de 2^N componentes con los valores deseados (impulsos, o posiciones finales, según sea el caso).

El vector se escribe en un archivo de datos (extensión .dat) para el posterior tratamiento estadístico y la construcción de gráficos.

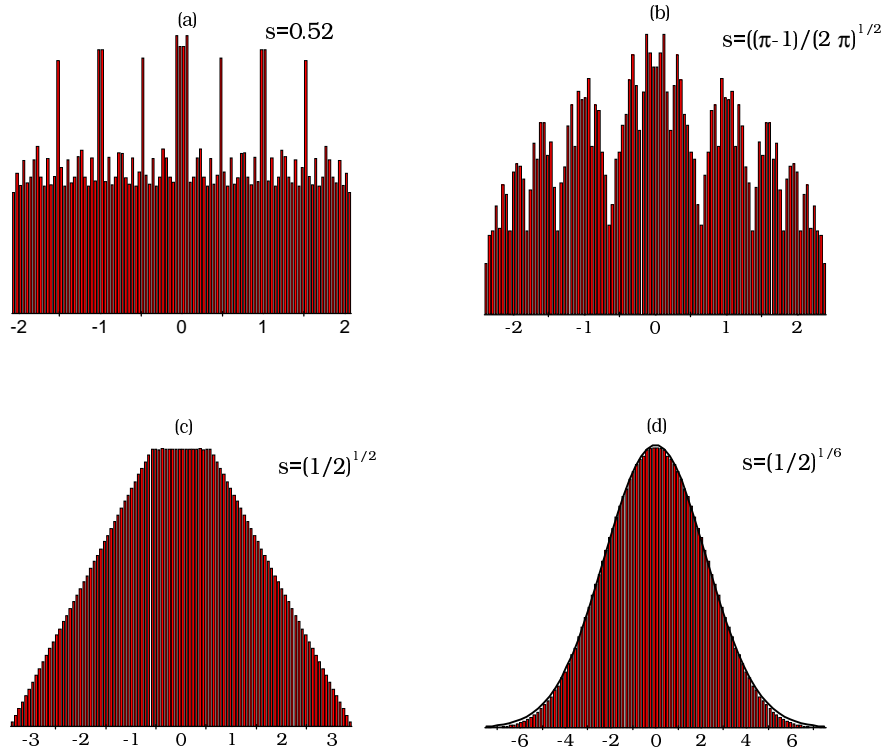


Figura A.1: Histogramas correspondientes a $N = 15$ y diferentes valores del *step factor*. (a) $s = 0.52$; (b) $s = \sqrt{(\pi - 1)/2\pi}$; (c) $s = 1/\sqrt{2}$; (d) $s = 1/\sqrt[6]{s}$, fit gaussiano.

La principal ventaja de usar funciones intrínsecas es que resultan en una mayor velocidad de cálculo. El mayor valor de N con el que trabajamos fue 20 generando un archivo de datos de alrededor de 18Mb de memoria, y tardó menos de 30 minutos. De todas maneras, la capacidad de cálculo no fue el problema principal sino la cantidad de datos que los programas graficadores (ORIGIN[®], por ejemplo). Nos encontramos con que no se le podían cargar

mucho más que 2^{19} datos a una columna. Por lo que ese fue nuestro límite real.

En la figura A.1 se pueden ver cuatro histogramas generados con cuatro valores de s distintos y $N = 15$. Además de apreciarse cómo cambia la forma con el valor de s , se puede ver que para dos potencias de $1/\sqrt{2}$ la distribución es suave (figura A.1 (c) y (d)), y en las figuras A.1 (a) y (b) se puede observar claramente la autosimilaridad solapada.

A.5 Resumen

El caminante aleatorio con paso exponencialmente variable fue presentado desde una perspectiva física describiendo difusión amplificada o amortiguada. La dependencia del proceso en el valor del factor s es muy rica mostrando propiedades fractales y retrodictivas cuando $s < 1/2$ o $s > 2$. Por otro lado para $s \in [1/2, 2]$ encontramos comportamientos muy diferentes para distintos conjuntos de valores (autosimilaridad solapada, distribuciones suaves y , aunque no estudiado aquí, ausencia de distribución para algunos valores de s cuando $N \rightarrow \infty$). Los puntos $s = 1/2$ y $s = 2$ delimitan comportamientos muy distintos por lo que son puntos críticos *morfológicos*. Como dijimos este problema permanece abierto y esperamos motivar posteriores estudios. Ha sido tratado con anterioridad desde una perspectiva matemática, como parte del estudio de series aleatorias como un caso especial de convoluciones de Bernoulli[20, 21, 22].

Bibliografía

- [1] M. Jammer. *The Philosophy of Quantum Mechanics* Volúmenes I y II. John Wiley & Sons, New York (1974).
- [2] B. Misra y E. C. G. Sudarshan. *J. Math. Phys.* **18**, 765 (1977).
- [3] Max Jammer citado en: R. Omnès. *The Interpretation of Quantum Mechanics*: Princeton University Press. Princeton, New Jersey (1994).
- [4] D. Home. *Conceptual Foundations of Quantum Physics: An overview from Modern Perspectives*. Plenum Press, New York and London (1997).
- [5] S. Pascazio y M. Namiki. “Quantum Zeno Effect as a Purely Dynamical Process” en *Annals New York Academy of Science*.
- [6] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison Wesley Publishing Company (1985).
- [7] C. Cohen-Tanoudji, B. Diu, F. Laloë. *QUANTUM MECHANICS Volúmenes I y II*. John Wiley & Sons-Hermann, Paris (1977).
- [8] V. Gontis, B. Kaulakys. *Lithuanian Journal of Physics*, 1998, **38**, Nr. 1, 118-121; LANL e-print archives # quant-ph/9806015.
- [9] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger y D. J. Wineland. *Phys. Rev. A* **41**, 2295 (1990).
- [10] R. J. Cook. *Phys. Scr.* bf T21, 49 (1988).
- [11] T. Petroski, S. Tasaki e I. Prigogine. *Phys. Lett. A* **151**, 109 (1990).
- [12] I. I. Rabi, N. F. Ramsey y J. Schwinger. *Rev. Mod. Phys.* **26**, 167 (1954).
- [13] H. Nakazato, M. Namiki, S. Pascazio y H. Rauch. *Understanding the quantum Zeno effect*. LANL e-print archives # quant-ph/9605008.
- [14] A. Peres. *Am. J. Phys.* **48**, 931 (1980).

- [15] J. von Neumann. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton (1955).
- [16] P. Facchi, V. Gorini, G. Marmo, S. Pascazio y E. C. G. Sudarshan. *Quantum Zeno Dynamics*. LANL e-print archives # quant-ph/0004040 (8 Apr 2000).
- [17] Ver, por ejemplo, la cita [6] en el artículo de Facchi *y col.* citada en este trabajo o la [7] en el artículo de Nakazato *et al.*
- [18] G. C. Ghirardi, C. Omero, T. Weber y A. Rimini, *Nuovo Cimento* **52A** (1979) 421.
- [19] A. C. de la Torre, A. Maltz e I., H. Márтин, P. Catuogno, García-Mata. *Random walk with exponentially varying step* (Preprint, Universidad Nacional de Mar del Plata).
- [20] P. Erdős. *On the smoothness properties of a family of Bernoulli convolutions*. Amer. J. Math. **62**, 180-186, (1940).
- [21] P. Erdős. *On a family of symmetric Bernoulli convolutions*. Amer. J. Math. **61**, 974-976, (1939).
- [22] B. Solomyak. *On the random series $\sum \pm \lambda^n$ (an Erdős problem)*. Annals of Mathematics. **142**, 611-625, (1995).