

Tesis de Licenciatura:
Modelo Estándar e Inflación
del universo en 5-D

Alumno: Diego Sebastián Ledesma
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de Mar del Plata
Profesor asesor: Dr. Mauricio Bellini

Tesis presentada al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de La Universidad de Mar del Plata, para obtener el título de Licenciado en Física

16 de junio de 2004
Mar del Plata, Provincia de Buenos Aires. República Argentina

Agradecimientos

Agradezco enormemente al Doctor Mauricio Bellini del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas de La Universidad Nacional de Mar del Plata por haberme asesorado, aconsejado y apoyado en la elaboración de este trabajo, en especial por su enorme paciencia para conmigo y por su disposición para ayudar en todo momento. Quiero agradecer además a todos los profesores y compañeros que supieron soportar mis pedidos de cambio de horario en las materias y que me facilitaron así el cursado de las mismas y al doctor Pedro Catuogno por las preguntas sobre matemáticas que me ayudó a responder. También le doy gracias a mi novia Mara porque la amo y a mis amigos mas íntimos: Jorge, Leandro (que hoy, lamentablemente, no está entre nosotros), Damián, Sebastián y Gastón por su amistad, apoyo e incondicionalidad.

En lo que a mi familia respecta agradezco a mi papá Hector, a mis hermanos Sergio y Federico, a mis abuelos Angel y Coca y a mis tíos Horacio y Tony porque los quiero mucho, por ayudarme y estar a mi lado cuando los necesitaba, pero muy especialmente quiero agradecer a mi mamá Graciela (a quien además dedico este trabajo) por sus consejos, por ser mi soporte incondicional, porque le debo gran parte de lo que soy y porque su enorme sacrificio diario me ha permitido llegar hasta este punto de mi carrera.

A mi madre.

Índice general

1. Introducción	1
2. Relatividad General	3
2.1. Espacios de Riemann	3
2.1.1. Variedades diferenciales	3
2.1.2. Métricas Riemannianas	6
2.1.3. Geodésicas y Curvatura	10
2.1.4. Tensores en variedades Riemannianas	13
2.2. Relatividad General	15
3. Cosmología de Big Bang	21
3.1. Modelo cosmológico estándar de Big-Bang	21
3.1.1. El principio cosmológico	22
3.1.2. Métrica de Robertson-Walker	23
3.1.3. Corrimiento al rojo	24
3.1.4. Obtención de las ecuaciones de Einstein	25
3.1.5. Definición de los parámetros cosmológicos	28
3.1.6. Historia del universo. Solución particular del Modelo Estándar	29
3.1.7. Problemas del modelo cosmológico estándar	30
3.2. Inflación	31
3.2.1. Inflación caótica: aproximación semiclásica	32
4. Teoría de materia inducida	37
4.1. Formalismo	37
4.2. Aplicaciones a cosmología	38
4.3. Inflación desde el punto de vista de Materia inducida	42
5. Otra forma de ver inflación en 5-D.	45
5.1. Introducción	45
5.2. Formalismo	46

6. Cosmología en 5-D. Otro punto de vista	51
6.1. Introducción	51
6.2. Formalismo	52
6.3. Inflación en este nuevo formalismo	59
6.4. Ejemplo	60
7. Conclusiones	63

Capítulo 1

Introducción

Al comienzo de los tiempos el hombre miró el cielo como algo extraño, velado a su entendimiento. Era el lugar reservado a Dios, que regía su comportamiento de una forma oscura y difícil de comprender.

Con la aparición de la teoría de Gravitación de Newton, se comenzó a mirar el cosmos en forma diferente. El hombre se dio cuenta que lo podía describir por medio de las mismas leyes que gobernaban la naturaleza en la tierra, lo que marcó una conexión entre nuestro mundo y el exterior. El universo ya no aparecía como algo extraño, se lo podía explicar. Esto marcó una revolución en la forma de pensar, fundamentalmente gestada por la declaración de independencia que le hizo el hombre a Dios para la explicación de lo que nos rodeaba.

Como sucedió con otras ramas de la Física, cuando se empezó a estudiar el universo con más detalle, la teoría de Newton tenía problemas para explicar el comportamiento de ciertos cuerpos celestes, es decir, las predicciones contrastaban con las observaciones, lo que en Física es un argumento más que suficiente para asegurar que algo no es completamente válido. En este punto de la historia es donde aparece Einstein (1916) con su teoría General de la Relatividad [12] para dar una mejor descripción del cosmos y resolver los problemas de la vieja teoría de gravitación, pero a su vez abrió un abanico de posibilidades para el universo, permitió la aparición de nuevas teorías e impulsó a formular muchísimas más preguntas de las que se podían responder.

Uno de los cambios importante hechos por la teoría de Einstein fue en la forma de ver el universo. El hombre creyó durante mucho tiempo que el universo era estático, quizá debido a que era una idea que se venía arrastrando desde tiempo atrás. La teoría General de la Relatividad destruyó esa concepción y propuso una idea diferente sobre como se comportaba el cosmos por medio del modelo matemático de la gran explosión, que describía una expansión del universo muy abrupta (Big Bang). Éste le atribuía al cosmos un principio y, fundamentalmente, movimiento, el universo ya no era algo

estático sino que tenía dinámica. El modelo fue posteriormente confirmado por un resultado inesperado obtenido por el astrónomo E. Hubble en sus observaciones sobre las galaxias distantes: *el universo se estaba expandiendo* [2]. Éste fue un resultado notable que le dio gran impulso al modelo cosmológico de Big Bang.

A partir del resultado anterior se realizaron muchos modelos para explicar porque el universo se hallaba en expansión. La mayoría basados en la teoría de Einstein. Casi todos tienen como resultado inevitable que el universo surgió a partir de una gran explosión. Actualmente el modelo más aceptado y que mejor describe el universo hasta nuestros días es el modelo cosmológico estándar de Big Bang [4], que fue formulado originalmente por el matemático Friedmann a partir de una solución particular a las ecuaciones de Einstein para un universo espacialmente homogéneo e isótropo. Aunque en un principio parece estar de acuerdo con lo que se observa y muchas de sus predicciones fueron confirmadas experimentalmente, éste posee dificultades para explicar ciertas propiedades del universo [2],[4], como por ejemplo, su excesiva planaridad. Fue por ello que para resolver estos inconvenientes se idearon nuevas teorías que contuvieran al modelo estándar, pero que explicaran los problemas que éste no podía. Así surge la teoría de inflación [5], [2] que de todas las que hay es la más aceptada actualmente. Luego de su aparición, se realizaron una gran gama de modelos que contienen un escenario inflacionario y que intentan describir el universo desde sus primeros instantes. La discusión continúa, pues aún la teoría de inflación posee dificultades para explicar el universo [6] y es por ello que, aún, la última palabra no está dicha.

En este trabajo daremos dos formas posibles de embeber la teoría inflacionaria en un espacio pentadimensional dado por las cuatro ya conocidas más una quinta que relacionaremos con los parámetros medibles. Para ello nos inspiraremos en la teoría de Materia Inducida propuesta por P.S. Wesson y J. Ponce de Len [7]. Dicha teoría a su vez posee su formalismo matemático basado en una idea propuesta por el matemático Kaluza [21], y ampliada más tarde por Klein [22], que propone unificar la teoría de gravitación de Einstein y el Electromagnetismo de Maxwell mediante el agregado de una nueva coordenada a las cuatro ya conocidas. Comenzaremos con la introducción a la teoría General de la Relatividad que es en la que se basan la gran mayoría de los modelos cosmológicos. No nos detendremos mucho en los detalles sino que veremos una idea general. Luego continuaremos dando una introducción al Modelo Cosmológico Estándar de Big Bang [8] donde veremos una solución particular y algunos de los problemas que presenta. También veremos la teoría inflacionaria más aceptada actualmente que es la de Inflación Caótica concebida originalmente por A. Linde. Más adelante seguiremos con la teoría de Materia Inducida, para finalmente dar nuestra propia concepción de las cosas.

Capítulo 2

Relatividad General

En este capítulo vamos a hacer una introducción a la teoría de Relatividad General. Para ello primero vamos a estudiar los conceptos generales de los espacios de Riemann y de la geometría Riemanniana, sin detenernos con mucho detalle en las cuentas, siguiendo los libros *Geometría Riemanniana* de M.P. Do Carmo [9] y *Manifold theory. An introduction for Mathematical Physicists* de Daniel Martin [11].

2.1. Espacios de Riemann

2.1.1. Variedades diferenciales

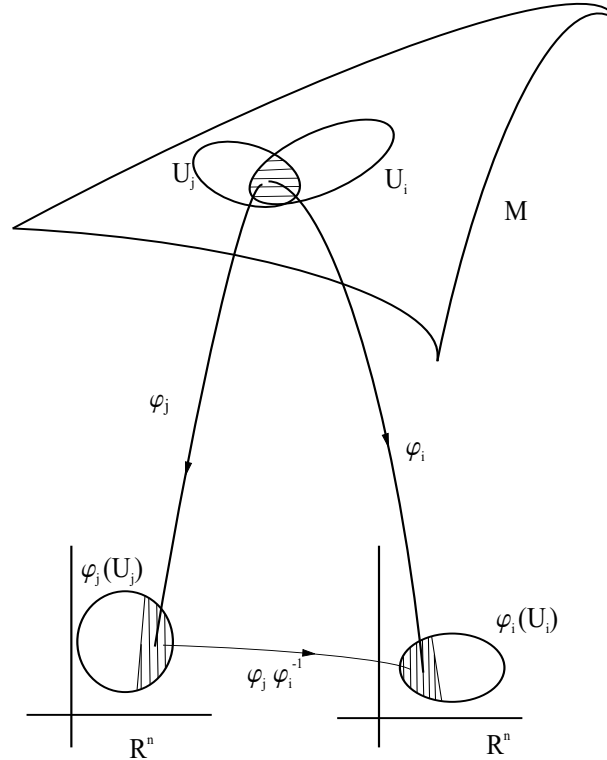
Antes de comenzar con este tema haremos un repaso de algunas definiciones de cálculo avanzado [10]

- a) Sea G un conjunto abierto en \mathbb{R}^n . Entonces diremos que el mapa $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$ es una función C^k si y solo si posee todas las derivadas parciales hasta orden k .
- b) Sean G, G' conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ respectivamente, y sea $f : G \rightarrow G'$. Diremos que f es un C^k -mapa si para todo $p \in G$, las coordenadas y_j , (con $j = 1 \dots n$) de $f(p)$ son funciones C^k de las coordenadas x_i , (con $i = 1 \dots m$) de p . Si f es biyectiva y f^{-1} es un C^k -mapa, diremos que f es un C^k difeomorfismo.

Sea M un conjunto. Una carta n -dimensional de M es un par (U, φ) que consiste de un subconjunto U de M y una biyección $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, donde V es abierto. U es conocido como el dominio de la carta. A cada punto $p \in U$ le podemos asignar coordenadas (x_1, \dots, x_n) (abreviando (x_i)) por medio de los mapas de proyección $u_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_i = u_i \circ \varphi$, $i = 1 \dots n$.

Usualmente es imposible hallar una sola carta que cubra todo el conjunto M , en este caso es necesario introducir una colección de cartas cuyos dominios juntos cubran M .

Figura 1



Sea $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ una colección de cartas en M , I un conjunto de índices y $\varphi(U_i)$ un conjunto abierto de \mathbb{R}^n , tal que:

- a) $M = \cup_{i \in I} U_i$.
- b) Para todo par $i, j \in I$ para los cuales $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, el mapa $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ es un C^k difeomorfismo. Entonces las cartas (U_i, φ_i) , (U_j, φ_j) se llaman compatibles, y A es llamado un C^k -atlas de cartas en M .

La unión de C^k -atlas puede no ser un C^k -atlas, en caso de que lo sean diremos que son equivalentes.

Un C^k -atlas en un conjunto se denomina completo o maximal si cualquier carta, que sea compatible con otra, está en sí misma contenida en el atlas. Se dice que un C^k -atlas completo define una C^k -estructura en la variedad. Se puede ver que es posible obtener un C^k -atlas completo a partir de un C^k -atlas A en M , tomando la unión de todas las cartas que son compatibles con aquellas que comprenden A .

Una C^k -variedad diferencial de dimensión n es un conjunto M con un C^k -atlas completo de cartas (U_i, φ_i) , donde $\varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$. El dominio de cada

carta es llamado entorno coordinado de la variedad.

Definición 2.1.1 *Sea M una variedad diferencial. Una aplicación diferenciable $\gamma:(0, t) \rightarrow M$ se denomina una curva diferenciable en M . Supongamos que $\gamma_0 = p \in M$, y sea \mathcal{D} el conjunto de las funciones diferenciables en p . Un vector tangente a la curva en $t = 0$ es la función $\gamma'_0 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por:*

$$\gamma'_0 f = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \Big|_{t=0}, f \in \mathcal{D}.$$

Un vector tangente en $p \in M$ es un vector tangente en $t = 0$ de alguna curva γ_t con $\gamma_0 = p$. Indicaremos al conjunto de los vectores tangentes a M en p como $T_p M$

Es posible ver que el conjunto $T_p M$ con las operaciones usuales de funciones es un espacio vectorial de dimensión n y que al escoger una parametrización $\varphi : U \rightarrow M$ queda determinada una base asociada $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ en $T_p M$. Es también fácil de ver que la estructura lineal no depende de la parametrización.

Definición 2.1.2 *Un campo vectorial \hat{X} en una variedad diferencial M es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ de la variedad un vector $\hat{X}(p) \in T_p M$.*

Considerando una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es posible escribir:

$$\hat{X}(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde cada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en U y $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ es una base asociada a φ . El campo vectorial \hat{X} es diferenciable sí y solo sí las funciones a_i son diferenciables.

Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ al conjunto de los campos vectoriales y por $\mathcal{D}(M)$ al de las funciones reales diferenciables definidas en M .

Definición 2.1.3 *Un campo vectorial V a lo largo de una curva γ_t es una aplicación que para cada t asocia un vector tangente $V(t) \in T_{\gamma_t} M$. Para toda función diferenciable f se dice que $V(t)$ es diferenciable si $t \rightarrow V(t)f$ es diferenciable.*

Un ejemplo de estos es el campo vectorial $d\gamma_t(\frac{d}{dt}) = \frac{d\gamma_t}{dt}$ que es llamado campo de velocidades de γ_t .

2.1.2. Métricas Riemannianas

Definición 2.1.4 Una métrica Riemanniana en una variedad diferencial M es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en el espacio tangente $T_p M$, que varía diferenciablemente en el siguiente sentido: Si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es un sistema de coordenadas locales en torno de p , con $\varphi(x_1, \dots, x_n) = q \in \varphi(U)$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\varphi(0, \dots, 1, \dots, 0)$, entonces:

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_q, \quad (2.1)$$

es una función diferenciable en U .

Es claro que esta definición no depende del cambio de coordenadas. Toda métrica tiene asociada una forma cuadrática dada por:

$$dS^2(v_1, \dots, v_n) = \sum_{ij}^n g_{ij}(x_1, \dots, x_n) v_i v_j, \quad (v_1, \dots, v_n) \in T_{(x_1, \dots, x_n)} M,$$

que es dada comunmente en lugar de la métrica.

Es usual dejar de indicar el índice p en $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ siempre que no de lugar a confusión. Las funciones g_{ij} ($= g_{ji}$) son llamadas expresiones o coeficientes de la métrica Riemanniana. Llamaremos *Variedad Riemanniana* a una variedad diferencial dotada de una métrica Riemanniana.

Una vez definida una estructura se puede definir una noción de equivalencia entre estructuras del mismo tipo.

Definición 2.1.5 Sean M y N variedades Riemannianas. Un difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ se denomina una isometría si:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)},$$

para todo $p \in M$, $u, v \in T_p M$.

La definición de una métrica en la variedad nos permite medir. Veremos más adelante que la definición de distancia entre dos puntos de la variedad está relacionada con la longitud de arco de un tipo de curvas llamadas geodésicas.

Por ahora daremos la definición de la longitud de arco y del volúmen en una variedad Riemanniana.

Definición 2.1.6 Se define longitud de arco entre dos puntos de la curva γ_{t_1} y γ_{t_2} , a la integral

$$S_{\gamma_t} = \int_{t_0}^{t_1} \langle \gamma_t, \gamma'_t \rangle^{1/2} dt.$$

Reemplazando en la definición por los coeficientes de la métrica y considerando $\gamma_t = (x_1(t) \dots, x_n(t))$, se obtiene

$$S_{\gamma_t} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{ij} g_{ij}(\gamma_t) \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right)^{1/2} dt.$$

El volúmen de una región del espacio está definido de la siguiente forma: sea una región cerrada y compacta R de la variedad M . Supongamos que R en una carta $\phi(U)$. Entonces el volúmen de R será:

$$vol(R) = \int_{\phi^{-1}(R)} (\det(g_{ij}))^{1/2} dx_1 \dots dx_n.$$

Daremos ahora la definición de conexión que nos será útil para definir posteriormente el concepto de derivada covariante.

Definición 2.1.7 Una conexión afín ∇ en una variedad diferencial M es una aplicación

$$\nabla : \mathcal{X}(M \times \mathcal{X}(M)) \rightarrow \mathcal{X}(M),$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ y que satisface las siguientes propiedades:

- a) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- b) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- c) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

donde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Observación

Escojamos un sistema de coordenadas (x_1, \dots, x_n) en torno de p y escribamos

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad Y = \sum_j y_j X_j,$$

donde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Entonces tenemos

$$\nabla_X Y = \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) = \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i (y_j) X_j.$$

Si hacemos $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, concluimos que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left[\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right] X_k,$$

lo que nos muestra que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p)$, $y_k(p)$ y de la derivada $X(y_k)(p)$ de y_k respecto al campo X .

Proposición 2.1.1 *Sea M una variedad diferencial con una conexión afín ∇ . Entonces existe una única correspondencia que asocia a un campo vectorial V a lo largo de la curva γ_t otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de γ_t . Al campo $\frac{DV}{dt}$ se lo denomina derivada covariante de V a lo largo de γ_t , y es tal que:*

- a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, donde W es un campo de vectores a lo largo de la curva γ_t .
- b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, donde f es una función diferenciable en $(0,t)$.
- c) Si V es inducido por un campo de vectores X , esto es $V(t) = X(\gamma_t)$, entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma_t}{dt}}X$.

Demostración

Supongamos que inicialmente existe una correspondencia que satisface a), b) y c). Sea $\varphi : U \in \mathbb{R}^n \rightarrow M$ un sistema de coordenadas tal que $\gamma_t \subset \varphi(U)$. Expresemos a γ_t localmente como $(x_1(t), \dots, x_n(t))$. Notemos $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Entonces podemos expresar localmente al campo $V = \sum_j v^j X_j$, donde $v_j = v_j(t)$ y $X_j = X_j(\gamma_t)$. De a) y b) obtenemos:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt},$$

y de c):

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma_t}{dt}} X_j = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j.$$

Usando la observación anterior vemos que:

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \left(\frac{dv^k}{dt} + \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^k \right) X_k. \tag{2.2}$$

Ésta última expresión nos muestra que si existe una correspondencia satisfaciendo las condiciones de la proposición (2,2,1) entonces tal correspondencia es única.

Para mostrar la existencia, definamos $\frac{DV}{dt}$ en $\varphi(U)$ por (2.2). Es inmediato verificar que las propiedades deseadas se cumplen. Si $\phi(W)$ es otro entorno coordinado tal que $\phi(W) \cap \varphi(U) \neq \emptyset$ y definimos $\frac{DV}{dt}$ en $\phi(W)$ también por (2.2), las definiciones concuerdan en $\phi(W) \cap \varphi(U)$ por la unicidad de $\frac{DV}{dt}$ en $\varphi(U)$. De aquí podemos ver que el resultado puede ser extendido a toda la variedad. \square

Una vez entendido ésto podemos definir paralelismo en forma natural.

Definición 2.1.8 *Sea una variedad diferencial con una conexión afín. Un campo vectorial a lo largo de una curva $V(t)$ se dice paralelo si $\frac{DV(t)}{dt} = 0$.*

Sea $v \in T_p M$ y $V(t)$ un campo paralelo a lo largo de una curva γ_t tal que $V(0) = v$, entonces se dirá que para un t_0 fijo, $V(t_0)$ es el transporte paralelo a lo largo de γ_t de v .

Definición 2.1.9 Sea M una variedad diferencial dotada de una conexión afín ∇ . Una conexión se dice compatible con la métrica cuando para toda curva diferencial γ_t cualquier par de vectores paralelos P, P' a lo largo de γ_t cumple que $\langle P, P' \rangle = \text{cte}$.

Esta definición está justificada por la siguiente proposición que daremos sin demostración.

Proposición 2.1.2 Sea M una variedad Riemanniana. Una conexión ∇ es compatible con la métrica sí y solo sí para todo par de campos vectoriales V y W a lo largo de γ_t , se tiene:

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle v, \frac{DW}{dt} \right\rangle.$$

Observación

Del resultado anterior es muy simple ver que una conexión ∇ es compatible con la métrica sí y solo sí:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

para $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Definición 2.1.10 Una conexión afín se dice simétrica cuando:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = XY - YX \equiv [X, Y],$$

para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Teorema 2.1.1 Dada un variedad Riemanniana M , existe una única conexión afín satisfaciendo las siguientes propiedades:

- a) ∇ es simétrica.
- b) ∇ es compatible con la métrica Riemanniana.

Llamaremos a dicha conexión, conexión Riemanniana o de Levi-Civita.

Demostración Supongamos inicialmente la existencia de tal conexión, entonces:

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \\ Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \\ Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

Sumando las primeras dos, restando la tercera y usando la simetría de la métrica, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle Z, \nabla_Y X \rangle &= \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &\quad - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Esta última expresión nos muestra que ∇ está unívocamente determinada por la métrica. Por lo tanto la existencia será única.

Para mostrar la existencia definimos a ∇ por la expresión (2.3). Es fácil ver que cumple con las propiedades requeridas. \square

Llamamos a los coeficientes de la conexión Γ_{ij}^k definidos por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ *símbolos de Christoffel*. De (2.3) se puede ver que:

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\},$$

donde los g_{ij} están definidos como antes en (2.1).

Como la matriz (g_{km}) admite inversa (g^{mk}) , tenemos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}. \quad (2.4)$$

Notemos que en el espacio euclídeo los símbolos de Christoffel son 0. Por lo tanto la derivada covariante en este coincide con la derivada usual.

Todo lo definido hasta aquí (y por consiguiente lo que sigue también), puede ser extendido para métricas pseudo Riemannianas, que difieren de las Riemannianas en el hecho de que \langle, \rangle sea definida positiva. Es decir, puede existir un elemento del tangente u tal que $\langle u, u \rangle = 0$.

2.1.3. Geodésicas y Curvatura

Una vez vista la terminología básica pasaremos a estudiar dos conceptos fundamentales de la geometría Riemanniana, las geodésicas y la curvatura.

Vamos a definir a la geodésica como una curva de aceleración nula. Es posible mostrar que la geodésica minimiza la distancia entre dos puntos de una variedad arbitrariamente próximos.

Definición 2.1.11 *Una curva γ_t parametrizada en longitud de arco, esto es $\langle \gamma'_t, \gamma'_t \rangle = 1$, es una geodésica si para todo t se cumple:*

$$\frac{D}{dt} \gamma'_t = 0.$$

Veamos ahora las ecuaciones que satisfacen las geodésicas en un sistema de coordenadas (U, ϕ) . En U se tiene:

$$\gamma_t = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Aplicando la definición de geodésica obtenemos:

$$0 = \frac{D}{dt}(\gamma'_t) = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Luego, el siguiente sistema de ecuaciones de segundo orden satisface las relaciones buscadas, esto es:

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, k = 1, \dots, n.$$

El paso siguiente es estudiar la curvatura. Ésta mide, intuitivamente, cuanto deja una variedad Riemanniana de ser euclídea.

Definición 2.1.12 La curvatura R de una variedad Riemanniana M es una correspondencia que asocia a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ una aplicación $R(X, Y) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ dada por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{M},$$

donde ∇ es la conexión Riemanniana de M .

Otra manera de escribir la definición es considerar un sistema de coordenadas $\{x_i\}$ en torno de $p \in M$. Como $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}] = 0$, obtenemos:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Así se puede ver que la curvatura mide, de alguna forma la no conmutatividad de la derivada covariante. Pongamos $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, entonces:

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k \\ &= \nabla_{X_j} \left(\sum_m \Gamma_{ik}^m X_m \right) - \nabla_{X_i} \left(\sum_m \Gamma_{jk}^m X_m \right). \end{aligned}$$

Por otro lado, si suponemos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_m R_{ijk}^m X_m,$$

entonces por cálculo directo obtenemos:

$$R_{ijk}^m = \sum_m \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jl}^s - \sum_m \Gamma_{jk}^m \Gamma_{il}^s + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s. \quad (2.5)$$

Podemos bajar el índice de R_{ijk}^m haciendo:

$$\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle = \sum_m R_{ijk}^m g_{ms} = R_{ijks}.$$

Es posible ver fácilmente que los R_{ijkm} cumplen con las siguientes propiedades:

- a) $R_{ijkm} + R_{jkim} + R_{kijm} = 0$ (identidad de Bianchi),
- b) $R_{ijkm} = -R_{jikm}$,
- b) $R_{ijkm} = -R_{ijmk}$,
- c) $R_{ijkm} = R_{kmi j}$.

A partir de la definición de curvatura es posible obtener la curvatura seccional que está íntimamente ligada con el operador de curvatura. Nosotros no veremos ésta definición, pero si prestaremos atención a un concepto derivado de la curvatura seccional llamada *curvatura de Ricci* y *curvatura escalar* cuyas definiciones daremos a continuación:

Definición 2.1.13 Sea $x = z_n$ un vector unitario en $T_p M$. Tomemos una base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ del hiperplano de $T_p M$ ortogonal a x . Llamaremos *Curvatura de Ricci en la dirección de x* y *curvatura escalar en p* , a

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle,$$

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Ric_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x_i, z_i)x_i, z_i \rangle,$$

respectivamente.

Es posible ver que estas no dependen de la elección de las correspondientes bases ortonormales. Para ello definamos una forma bilineal simétrica en $T_p M$ Q . Sean $x, y \in T_p M$

$$Q(x, y) := \sum_i \langle R(x, z_i)y, z_i \rangle.$$

Esta forma bilineal también es llamada *Tensor Curvatura de Ricci* o simplemente *tensor de Ricci*.

Es fácil ver la simetría y que $Q(x, x) = (n - 1)Ric_p(x)$, lo que demuestra que Ric_p está intrínsecamente definida.

Por otro lado, como a toda forma bilineal le corresponde una aplicación lineal autoadjunta K , dada por:

$$\langle K(x), y \rangle = Q(x, y),$$

tomando la base ortonormal, obtenemos

$$Traza(K) = \sum_j \langle K(z_j), z_j \rangle = \sum_j Q(z_j, z_j) = n(n - 1)K(p),$$

lo que demuestra que $K(p)$ tampoco depende de la base ortonormal elegida.

Por abuso de lenguaje $Traza(K)$ es llamada también *Curvatura Escalar*. Nosotros, en lo siguiente y por cuestiones prácticas usaremos esta definición de curvatura escalar e iremos aún mas allá. Llamaremos $K = Traza(K)$.

Tomemos un sistema de coordenadas, entonces, como antes, tenemos: $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ y su matriz inversa g^{ij} . Teniendo en cuenta esto obtenemos que los elementos que forman el tensor de Ricci están dados por

$$R_{ik} = Q(X_i, X_k) = \sum_j \langle R(X_i, X_j)X_k, X_j \rangle = \sum_{m,j} R_{ijk}^m g_{mj} = \sum_{j,m} R_{ijkm} g^{jm}.$$

Por lo tanto, la curvatura escalar estará dada por

$$K = \sum_{ij} R_{ij} g^{ij}.$$

2.1.4. Tensores en variedades Riemannianas

En esta sección presentaremos una rápida introducción al estudio de tensores en una variedad Riemanniana. La idea de tensor generaliza la idea de campo vectorial y tiene, como propiedad importante, el hecho de poder ser derivado covariantemente.

Consideraremos que $\mathcal{X}(M)$ tiene estructura vectorial cuando consideramos como escalares a los elementos de $\mathcal{D}(M)$.

Definición 2.1.14 *Un tensor de orden r en M es una aplicación multilineal*

$$T : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M)}_{r \text{ factores}} \rightarrow \mathcal{D}(M).$$

Esto quiere decir que dados $Y_1 \dots Y_r \in \mathcal{X}(M)$, $T(Y_1, \dots, Y_r)$ es una función diferenciable que es lineal en cada uno de sus factores, ésto es:

$$T(Y_1, \dots, fX + gY, \dots, Y_r) = fT(Y_1, \dots, X, \dots, Y_r) + gT(Y_1, \dots, Y, \dots, Y_r),$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Un tensor es un objeto puntual en el siguiente sentido: sea un punto fijo $p \in M$ donde es posible definir campos E_1, \dots, E_n en $\mathcal{X}(M)$, $n = \dim(M)$, de modo que en cada $q \in U$, los vectores $E_1(q), \dots, E_n(q)$ forman una base de T_qM . Diremos en este caso que $\{E_i\}$ forman un referencial móvil de U . Además sean:

$$Y_j = \sum_{i_j} y_{i_j} E_{i_j},$$

entonces, por linealidad se obtiene:

$$T(Y_1, \dots, Y_r) = \sum_{i_1, \dots, i_r} y_{i_1} \dots y_{i_r} T(E_{i_1} \dots E_{i_r}). \quad (2.6)$$

Por lo tanto las funciones $T(E_{i_1} \dots E_{i_r}) = T_{i_1, \dots, i_r}$ son llamadas componentes de T en el referencial $\{E_i\}$.

La ecuación (2.6) describe la forma en que transforman los tensores ante un cambio de coordenadas. En general se puede definir a un tensor como toda cantidad que ante un cambio de coordenadas transforma según (2.6).

De la expresión (2.6) se sigue que el valor de $T(Y_1, \dots, Y_r)$ en un punto p depende solamente de las componentes de T , de los valores de p y de los valores de Y_1, \dots, Y_r en p . En este sentido decimos que T es puntual.

Es posible extender a los tensores la noción de derivada covariante. Para ello tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.15 *Sea T un tensor de orden r . El diferencial covariante ∇T de T es un tensor de orden $r + 1$ dado por*

$$\begin{aligned} \nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) &= Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) \\ &\quad - \dots - T(Y_1, \dots, \nabla_Z Y_r). \end{aligned}$$

Para cada $Z \in \mathcal{X}(M)$, la derivada covariante está dada por:

$$\nabla_Z T(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z).$$

Ilustremos como funciona la derivada covariante en tensores. Tomemos una carta ϕ . Consideremos el referencial dado por $\{X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\}$ y derivemos covariantemente las componentes del tensor en el referencial.

$$\begin{aligned} \nabla_{X_j} T_{i_1, \dots, i_r} &= \nabla_{X_j} T(X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) \\ &= X_j(T(X_{i_1}, \dots, X_{i_r})) - T(\nabla_{X_j} X_{i_1}, \dots, X_{i_r}) - \dots - T(X_{i_1}, \dots, \nabla_{X_j} X_{i_r}). \end{aligned}$$

Entonces, recordando que:

$$\nabla_{X_j} X_{i_k} = \sum_m \Gamma_{j i_k}^m X_m,$$

y tomando las componentes, obtenemos la fórmula conocida:

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} T_{i_1, \dots, i_r} &= \frac{\partial}{\partial x_j} T_{i_1, \dots, i_r} - \sum_m \Gamma_{j, i_1}^m T_{m, i_2, \dots, i_r} - \\ &- \dots - \sum_m \Gamma_{j, i_k}^m T_{i_1, \dots, m, \dots, i_r} - \dots - \sum_m \Gamma_{j, i_r}^m T_{i_1, \dots, i_{r-1}, m}. \end{aligned}$$

2.2. Relatividad General

Nota: Antes de comenzar con el desarrollo de la teoría vale la pena aclarar que usaremos el sistema de unidades tal que la velocidad de la luz c en el vacío es igual a 1.

Ya tenemos todo el aparato matemático necesario para meternos de lleno en la Teoría de la Relatividad General. A continuación mostraremos las ideas generales de la teoría según las expuso Einstein [12] siguiendo el formalismo del libro de Weinberg [13]. Comencemos formulando el principio de equivalencia que es en el que se basa la teoría.

Principio de equivalencia: *En todo punto del espacio-tiempo dentro de un campo gravitacional arbitrario, es posible elegir un sistema de coordenadas inercial de forma tal que, (respecto de él) en un entorno del punto considerado, las leyes de la naturaleza toman la misma forma que para un sistema cartesiano no acelerado en ausencia de gravitación.*

Veamos lo que dice este principio. Sea K un sistema inercial. Masas materiales que se hallen suficientemente alejadas entre sí y de otras masas están por lo tanto, desprovistas de aceleración respecto de K . Reframos estas masas a un sistema de coordenadas K' dotado de aceleración uniforme respecto de K . Respecto de K' todas las masas tienen aceleraciones iguales y paralelas entre sí, es decir, que con respecto a dicho sistema, todas las masas se comportan exactamente como si existiera un campo gravitatorio y K' no poseyese aceleración. Dejando de lado la "causa" de tal campo gravitatorio, no hay nada que se oponga a que concibamos como real este campo, esto es, el sistema K' en "reposo" y un campo gravitatorio presente como equivalente a la concepción de que K es el único sistema "permitido" de coordenadas y no existe campo gravitatorio. Esto último, es lo que nos dice el principio de equivalencia: "hay una completa equivalencia física de los sistemas de coordenadas K y K' ".

Este principio exige que, al considerar regiones galileanas (es decir, regiones finitas en las cuales, respecto a un espacio de referencia las partículas se mueven libremente sin aceleración y en las cuales se cumplen las leyes de la relatividad especial), podemos hacer uso de sistemas no inerciales, es decir, de sistemas de coordenadas que respecto de los inerciales están dotados de aceleraciones y de movimientos rotatorios. Para resolver la cuestión referente a la razón objetiva de la preferencia de ciertos sistemas de coordenadas,

debemos estar en condiciones de usar sistemas dotados de movimientos arbitrarios cualesquiera. Se puede ver que para lograr esto hay serios problemas con la interpretación física del espacio y del tiempo según la teoría especial de la relatividad, dado que el campo gravitatorio influye en las leyes métricas del continuo espacio-tiempo, y hasta las determina. Dado que se deben expresar geoméricamente las leyes que rigen la configuración de los cuerpos rígidos ideales, resulta que la geometría euclídea ya no nos sirve. Aquí es donde entra la geometría Riemanniana.

De acuerdo con el principio de inercia, una partícula sobre la que no actúa ninguna fuerza se mantiene en movimiento rectilíneo uniforme. La generalización natural más simple de la línea recta compatible con la geometría de Riemann es la línea geodésica. En consecuencia, tendremos que suponer, en el sentido del principio de equivalencia, que el movimiento de una partícula que se halla sometida solo a la inercia y a la gravitación se halla descrito por la expresión:

$$\frac{d^2 x_k}{ds^2} + \sum_{ij=t,x,y,z} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} = 0, \quad k = t, x, y, z. \quad (2.7)$$

Como se puede ver, ésta se reduce a una recta en el caso que se anulen todos los componentes Γ_{ij}^k del campo gravitatorio. Pero para hallar mayor relación con las ecuaciones de movimiento de Newton veamos lo siguiente: consideremos una partícula en un campo gravitatorio débil. Basados en ello haremos una primera aproximación de la métrica mediante infinitésimos de primer orden (γ_{ij} , $i, j = t, x, y, z$), de forma tal que los elementos no nulos de la métrica sean (considerando la velocidad de la luz $c = 1$):

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -1 + \gamma_{tt}, & g_{xx} &= 1 + \gamma_{xx}, \\ g_{yy} &= 1 + \gamma_{yy}, & g_{zz} &= 1 + \gamma_{zz}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por ser la trayectoria una geodésica, se obtiene

$$1 = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 g_{tt} + \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 g_{xx} + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 g_{yy} + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 g_{zz}.$$

Si consideremos que los γ_{ij} son infinitésimos y que la partícula se mueve a una velocidad muy pequeña (comparada con la de la luz), se puede escribir la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$1 = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 [1 - v_x^2 + v_y^2 + v_z^2] \simeq \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \Rightarrow |dt| = |ds|.$$

Además $v_x = \frac{dx}{ds}$, $v_y = \frac{dy}{ds}$, $v_z = \frac{dz}{ds}$ serán muy pequeños comparados con $|\frac{dt}{ds}| \simeq 1$.

Ahora supongamos que el campo gravitatorio varía tan poco con el tiempo que las derivadas de γ_{ij} respecto de t se pueden despreciar. Haciendo estas aproximaciones, (2.7) se reduce a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x}\gamma_{tt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial y}\gamma_{tt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial z}\gamma_{tt}. \quad (2.9)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación de movimiento de Newton para una partícula material en un campo gravitatorio si identificamos a γ_{tt} con el potencial gravitatorio $V(r)$, de la siguiente forma

$$\gamma_{tt} = -\frac{V(r)}{m},$$

en donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Que esta identificación sea admisible depende de que esta cantidad satisfaga o no (en primera aproximación), las mismas leyes de campo que las del campo que satisface el potencial gravitatorio.

Ésto nos muestra además que las Γ_{ij}^k juegan el rol de intensidad de campo gravitatorio.

La ecuación (2.7) nos muestra la influencia de la inercia y de la gravitación sobre el movimiento de la partícula material. Análogamente a lo que sucede en las ecuaciones de Newton, el primer término de (2.7) se debería considerar como la expresión de la inercia, mientras que el segundo como la expresión de la fuerza gravitacional.

Debemos ahora tratar de encontrar las leyes del campo gravitatorio. Para ello usamos el modelo dado por la ecuación de Poisson de la teoría Newtoniana

$$\Delta\phi = 4\pi K\rho.$$

donde ϕ es el campo gravitatorio clásico y ρ es la densidad de materia ponderable. Esta ecuación se funda en la idea de que el campo gravitatorio tiene su origen en la densidad de materia ponderable. Debe resultar así en la teoría de la relatividad, solo que aquí vamos a utilizar el tensor de energía momento por unidad de volumen T_k^i . En este último, no sólo se halla la energía de la materia ponderable, sino también la energía electromagnética. Éste es un tensor de rango 2 y en general llamaremos tensor energía momento de la materia.

Se puede ver que los principios de conservación de la energía y del momento se formulan mediante la afirmación de que la divergencia de este tensor es nula. Por lo tanto, en la teoría general de la relatividad debemos admitir como válida la correspondiente ecuación covariante. Recordemos que junto con la densidad de energía de la materia debe existir también una densidad de energía del campo gravitatorio. Esto significa que no puede hablarse de conservación de ímpetu y energía para la materia solamente.

Si existe una ecuación análoga a la de Poisson en la teoría general de la relatividad, esa ecuación debe ser una ecuación tensorial del tensor g_{ik} del

potencial gravitatorio. El tensor energía de la materia debe aparecer en el segundo miembro de la ecuación y el primero debe tener un tensor diferencial de las g_{ik} . Debemos encontrar dicho tensor diferencial que está determinado por las siguientes condiciones:

- a) No debe poseer coeficientes diferenciales de las g_{ik} mayores al segundo orden.
- b) Debe ser lineal y homogéneo respecto de los coeficientes diferenciales de segundo orden.
- c) Su divergencia debe ser nula.

Las dos primeras surgen naturalmente de la ecuación de Poisson, mientras que la última sale de que la divergencia de T_{ik} es igual a 0. El tensor que buscamos tiene la forma

$$R_{ik} + aK g_{ik}.$$

De la condición c) se puede ver que $a = 1/2$, por lo tanto la ecuación de campo gravitatorio que buscamos tiene la forma:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}K g_{ik} = -\chi T_{ik}. \quad (2.10)$$

Donde χ simboliza una constante que está relacionada con la constante de Newton. Notemos que esta ecuación es válida para cualquier sistema de coordenadas.

Antes de seguir adelante, transformemos (2.10) de la siguiente forma:

$$\sum_{i,k} g^{ik} (R_{ik} - \frac{1}{2}K g_{ik}) = -\chi \sum_{ik} g^{ik} T_{ik} = -\chi T,$$

de donde:

$$K = \chi T.$$

Por lo tanto podemos escribir (2.10) de la siguiente manera:

$$R_{ik} = -\chi (T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T) = -\chi T_{ik}^*. \quad (2.11)$$

Reemplacemos la coordenada temporal t por it (donde i es la unidad imaginaria). Ésto nos permite escribir, en una primera aproximación, al tensor g_{ik} de la siguiente forma:

$$g_{ik} = \delta_{ik} + \gamma_{ik},$$

donde δ_{ik} es la delta de Kronocker y las γ_{ik} forman un tensor simétrico y son muy pequeñas comparadas con la unidad. Además son suaves, en el sentido

de que es posible despreciar la derivada primera. Por lo tanto reemplazando en la ecuación (2.11), obtenemos para el primer miembro

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{jj}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 \gamma_{kj}}{\partial x_j \partial x_i} \right).$$

Por la libertad que hay en la elección del sistema de coordenadas, tomemos aquel que satisfaga

$$\sum_k \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{kk}}{\partial x_i} = 0.$$

En este caso (2.11) toma la forma

$$\sum_j \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial x_j^2} = 2\chi T_{ik}^*.$$

Estas ecuaciones tienen solución por medio del método común en electrodinámica, el de los potenciales retardados. Obtenemos así

$$\gamma_{ik} = -\frac{\chi}{2\pi} \int \frac{T_{ik}^*(x, y, z, t - r)}{r} dV. \quad (2.12)$$

Veamos ahora la forma del tensor de energía momento. Como dijimos antes este tensor contiene al campo electromagnético y a la materia ponderable. Se sigue de los resultados de la teoría general de la relatividad, que la contribución del campo electromagnético prácticamente se anula en comparación con la de la materia ponderable. Por lo tanto obtenemos una aproximación satisfactoria si hacemos

$$T_{ik} = \sigma \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds},$$

donde σ es la densidad de materia en reposo, esto es, la densidad de materia ponderable medida desde un sistema de referencia galileano.

Observemos que cometemos un error muy pequeño si reemplazamos a las g_{ik} por δ_{ik} . Por lo tanto, utilizando la signatura $(-, +, +, +)$:

$$1 = - \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2.$$

Si suponemos que las masas que generan el campo se mueven muy lentamente comparadas con la velocidad de la luz respecto al sistema de coordenadas usado, podemos decir que:

$$\left(\frac{dx}{ds} \right) = \left(\frac{dy}{ds} \right) = \left(\frac{dz}{ds} \right) = 0, \quad \left(\frac{dt}{ds} \right) = 1.$$

Usando éstas últimas relaciones podemos ver que

$$T_{xx}^* = T_{yy}^* = T_{zz}^* = \frac{\sigma}{2},$$

$$T_{tt}^* = -\frac{\sigma}{2},$$

de modo que, de (2.12) deducimos

$$\gamma_{xx} = \gamma_{yy} = \gamma_{zz} = -\frac{\chi}{4\pi} \int \frac{\sigma dV}{r},$$

$$\gamma_{tt} = \frac{\chi}{4\pi} \int \frac{\sigma dV}{r},$$

mientras que todos los demás $\gamma_{ij} = 0$, $i \neq j$. Esta última ecuación junto con (2.9), contienen a la teoría Newtoniana. Si reemplazamos γ_{tt} por lo que es en (2.9) obtenemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\chi}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\sigma dV}{r},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\chi}{8\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\sigma dV}{r},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\chi}{8\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{\sigma dV}{r}.$$

Comparando con las ecuaciones newtonianas, vemos que:

$$\chi = 8\pi G,$$

donde G es la constante gravitacional. Por lo tanto, podemos escribir finalmente la ecuación de campo gravitatorio:

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} K g_{ik} = -8\pi G T_{ik}, \quad (2.13)$$

donde G_{ik} así definido es el tensor de Einstein. Esta última ecuación se conoce como *ecuación de Einstein*.

Capítulo 3

Cosmología de Big Bang

En este capítulo veremos el fundamentalmente el Modelo Cosmológico estándar de Big Bang siguiendo los conceptos expuestos por Weinberg en su libro [13] y combinados con datos actualizados [8]. Finalmente veremos una breve introducción a la Teoría de Inflación en su versión más actual, que es la de Inflación Caótica concebida originalmente por A. Linde, basándonos en los libros *Particle physics and inflationary cosmology* del propio A. Linde [2], e *Inflación del universo, una aproximación estocástica* de M. Bellini [4].

3.1. Modelo cosmológico estándar de Big-Bang

La formulación del modelo de Big Bang comenzó en 1940 con el trabajo de Gamow, Alpher y Herman [14]. Para mostrar que las abundancias de los elementos tenían un origen cosmológico, ellos propusieron que al principio el universo era denso y caliente y que luego se enfrió y expandió hasta llegar a su estado actual. Alpher y Herman, en 1948, predijeron la radiación cósmica de fondo [15] (que fue observada posteriormente) y el corrimiento al rojo de la luz proveniente de las galaxias lejanas. Años después otros trabajos confirmaron la necesidad de que al principio el universo se comportara de esta forma.

Este modelo está basado en la teoría general de la relatividad y describe un universo globalmente homogéneo e isotrópico a partir de los 10^{-35} seg de su creación. Para tiempos menores hay que considerar efectos cuánticos y entra en juego otra rama de la Cosmología: *inflación*.

La teoría de inflación resuelve problemas que este modelo no logra explicar, como por ejemplo el problema de planaridad y del horizonte.

Comenzaremos nuestra descripción del modelo cosmológico a partir del principio cosmológico, que es una extensión del principio Copernicano, para concentrarnos en detalle en la descripción relativista del mismo.

3.1.1. El principio cosmológico

El principio cosmológico postula que a gran escala el universo es espacialmente isotrópico y homogéneo [13]. Así podemos tratar al universo como un fluido ideal.

Luego de aplicar este principio debemos formular nuestras ideas intuitivas de homogeneidad e isotropía en términos matemáticos. La homogeneidad del universo debe ser entendida en el mismo sentido que la homogeneidad de un gas (es por ello que a veces trataremos al universo como un gas ideal, aunque en realidad es un fluido ideal), es decir que este principio no se aplica al universo en detalle sino a regiones mayores que 10^8 a 10^9 años luz. Éstas pueden encerrar varios clústeres de galaxias.

Definamos primero el sistema de coordenadas para el espacio tiempo. Las coordenadas espaciales homogéneas con origen $x_i = 0$ en el centro de la galaxia, y con escalas de distancias definidas por la luminosidad aparente de las galaxias distantes, como se ven desde la nuestra. Para definir una escala temporal es conveniente usar la evolución del universo como reloj. Se sabe que campos cósmicos escalares, como la energía propia ρ o que la temperatura de la radiación de fondo T_γ son siempre decrecientes. Entonces, tomemos alguno de ellos y definamos el tiempo a partir del sistema elegido.

Podemos formular el principio de equivalencia en términos de la existencia de un sistema de coordenadas equivalente. Supongamos que usamos el sistema de coordenadas estándar para hacer nuestras observaciones astronómicas determinando g_{ij} y T_{ij} . Todos los demás campos cósmicos, serán función de las coordenadas estándares x_i . Diremos que un conjunto diferente de coordenadas x'_i es equivalente si toda la historia del universo se ve igual que en el sistema de coordenadas estándar. Ésto requiere que cada campo cosmológico (g'_{ij} y T'_{ij} y los demás) quede invariante en el nuevo sistema de coordenadas. Es decir que en cada punto de coordenadas y_i debemos tener por ejemplo:

$$g_{ij}(y) = g'_{ij}(y'), \quad (3.1)$$

$$T_{ij}(y) = T'_{ij}(y'), \quad (3.2)$$

lo que quiere decir que la transformación $x_i \rightarrow x'_i$ debe ser una isometría, y que las T_{ij} son invariantes de forma ante estas transformaciones.

En particular (3.2) se cumple para todo campo escalar S usado para definir el tiempo cósmico (también llamado estándar) t . Como S es por definición una función del tiempo (y es un escalar), tenemos que para $x = x'$

$$S(t') = S'(x') \equiv S(x) = S(t).$$

Entonces

$$t = t'. \quad (3.3)$$

Ésto significa que todo sistema de coordenadas que sea equivalente al estándar debe usar necesariamente el tiempo estándar.

Podemos formular la suposición de isotropía espacial como el requerimiento de que exista una familia de sistemas de coordenadas dependiendo de tres parámetros independientes, que son equivalentes a las coordenadas espaciales estándar y que tienen el mismo origen.

Para pedir homogeneidad, como mucho podremos pedir que cada punto x_i en el espacio tiempo esté en alguna trayectoria fundamental $x_i = X(t)$, que nos puede servir como origen de un sistema de coordenadas x'_i equivalente al sistema estándar. Nuestra galaxia es similar a las que la rodean. Por lo tanto, podemos esperar que las trayectorias fundamentales $X(t)$ estén bastante bien definidas por el movimiento de los miembros típicos del gas de las galaxias (estrellas), lo que no constituye una suposición fundamental de la homogeneidad. El punto importante es que, como en cualquier instante t las $X(t)$ llenan todo el espacio, ellas están determinadas por tres parámetros fundamentales independientes $a_i = X_i(\tau)$ de $X(t)$ para $t = \tau$. Entonces, homogeneidad significa que hay un conjunto de sistemas de coordenadas $x'_i(x; a)$ con tres parámetros independientes que son equivalentes al estándar x_i y que tienen origen en la trayectoria $x_i = X_i(t, a)$, esto es:

$$x'_i(X(t; a), t; a) = 0, \quad (3.4)$$

donde $X(t; a)$ es la trayectoria de un observador privilegiado para el cual el universo se ve isotrópico.

Resumiendo, el principio cosmológico implica la existencia de dos familias de transformaciones de coordenadas de tres parámetros cada una, que son isometrías en el sentido de (3.2) y que de acuerdo con (3.3) dejan el tiempo invariante.

3.1.2. Métrica de Robertson-Walker

El principio cosmológico requiere que la métrica que usemos para representar al universo en gran escala, describa una variedad que contiene una subvariedad esféricamente simétrica [13] [12] (el espacio que nosotros observamos). Es posible ver que la métrica que satisface esta condición tiene por elemento de línea

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R^2(t)}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

en donde $k = 1, 0$ o -1 , $R(t)$ es una función desconocida de la coordenada t llamada factor de escala, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y (dt, dx, dy, dz) está en el espacio tangente de la variedad en el punto (t, x, y, z) .

Por lo tanto la métrica estará dada por:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -1, \\ g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} &= \frac{R^2(t)}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2}, \\ g_{ij} &= 0 \quad \text{si } i \neq j, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ésta se conoce como *Métrica de Robertson-Walker (R-W)* [4].

Es interesante considerar las propiedades geométricas de la subvariedad tridimensional correspondiente a $t = \text{cte}$. Éste tiene una métrica dada por los siguientes coeficientes no nulos

$${}^3g_{xx} = {}^3g_{yy} = {}^3g_{zz} = \frac{R^2(t)}{(1 + \frac{1}{4}kr^2)^2},$$

en donde el supraindice 3 indica tres dimensiones (las dimensiones espaciales).

Si calculamos el tensor de Ricci para esta métrica tridimensional obtendremos que las componentes del tensor de Ricci son:

$${}^3R_{ik} = -2k({}^3g_{ij}).$$

Por lo tanto la curvatura seccional en 3-D vendrá dada por

$${}^3K = -\frac{6k}{R(t)^2},$$

lo que nos da una curvatura seccional constante (o sea la curvatura del espacio es constante). Ésto debe ser así para que (3.5) satisfaga el principio cosmológico. A partir de ahora llamaremos *espacio* a esta subvariedad, *tiempo* a la coordenada t y *coordenadas espaciales* a las coordenadas x, y, z . Se puede demostrar que cuando $k = -1$ o $k = 0$ el espacio es infinito y abierto, mientras que para $k = 1$ es finito y cerrado.

3.1.3. Corrimiento al rojo

La información más importante que se tiene sobre $R(t)$ proviene del desplazamiento observado en el rango de la frecuencia de la luz emitida por las fuentes lejanas. Para calcular estos corrimientos de frecuencia nos situaremos en el origen de coordenadas y consideraremos ondas electromagnéticas viajando en la dirección $(dt, dx, 0, 0)$, desde la posición $(t_1, x_1, 0, 0)$. Notemos que ésto no constituye ninguna pérdida de generalidad. La ecuación de movimiento para esta onda está dada por

$$0 = dt^2 - \frac{R(t)^2 dx^2}{(1 + \frac{1}{4}kx^2)^2}.$$

Por lo tanto, la luz llegará a nosotros después de un tiempo t_0 , dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{R(t)} = f(x_1), \quad (3.6)$$

donde:

$$f(x_1) = \int_0^{x_1} \frac{dx}{1 + \frac{1}{4}kx^2} = \begin{cases} 2 \arctan(\frac{x_1}{2}), & \text{si } k = 1 \\ x_1, & \text{si } k = 0 \\ 2 \operatorname{arctanh}(\frac{x_1}{2}), & \text{si } k = -1 \end{cases}$$

Por argumentos que veremos más adelante (sistema de referencia comóvil) podemos suponer que la galaxia que emite el rayo de luz permanece en la misma posición coordenada x_1 . Por lo tanto, $f(x_1)$ es una constante. Ésto nos permite pensar que si el próximo rayo de luz abandona la galaxia en $(t_1 + \delta t_1, x_1, 0, 0)$, llega a nosotros en el instante $t_0 + \delta t_0$ ($t_0 > t_1$). Entonces:

$$\int_{t_0 + \delta t_0}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{R(t)} = f(x_1). \quad (3.7)$$

Considerando que $R(t)$ no varía desde el instante que se emite hasta el momento en que se recibe la señal y sustrayendo (3.6) a (3.7), obtenemos

$$\frac{\delta t_0}{R(t_0)} = \frac{\delta t_1}{R(t_1)}.$$

Por lo tanto, el cociente entre la frecuencia que observamos ν_0 y la que se emitió ν_1 será:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)}.$$

Ésto puede ser expresado en términos del parámetro de corrimiento al rojo z , dado por:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} - 1 = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1, \quad (3.8)$$

donde λ es la longitud de onda de la luz. Si el universo se está expandiendo entonces $R(t_0) > R(t_1)$ y por lo tanto resulta de (3.8) que $\lambda_0 > \lambda_1$. O sea, el corrimiento de la luz es hacia el rojo. Si el universo se está contrayendo se obtiene $R(t_0) < R(t_1)$, $\lambda_0 < \lambda_1$ y por lo tanto el corrimiento es hacia el azul.

3.1.4. Obtención de las ecuaciones de Einstein

Para analizar la dinámica cosmológica debemos considerar los vínculos introducidos por las ecuaciones de Einstein. Aunque primero vamos a discutir la forma del tensor de energía momento.

Por la simetría de la métrica (3.5) el tensor de energía momento describe un fluido ideal o perfecto cuya densidad de energía ρ y presión p son solamente variables del tiempo y cuyas líneas de flujo son las curvas $(x, y, z) = \text{cte}$ [1]. Por lo tanto las coordenadas son comóviles. Este fluido puede ser pensado como una aproximación suave a la materia de nuestro universo [3]. Entonces $R(t)$ representa la separación entre dos líneas de flujo, esto es, entre dos galaxias "cercanas". Por lo tanto, éstas se alejarán o acercarán dependiendo de como varíe $R(t)$. Es posible ver que:

$$T_{ik} = (\rho + p)U_i U_k + p g_{ik},$$

donde $U_i = \frac{dx_i}{ds}$ son las componentes de la tetra-velocidad

$$U_t = -1, \quad U_x = U_y = U_z = 0.$$

Es conveniente aclarar que la forma del tensor es así porque estamos usando la métrica con la signatura $(-, +, +, +)$. En caso que usemos la signatura $(+, -, -, -)$ el tensor de energía impulso toma la siguiente forma

$$T_{ik} = (\rho + p)U_i U_k - p g_{ik}$$

Ambos tratamientos son equivalentes [3]. Por lo tanto, siguiendo nuestra línea de pensamiento, las componentes no nulas del tensor de energía momento está dado por

$$T_{tt} = -\rho g_{tt},$$

$$T_{xx} = p g_{xx},$$

$$T_{yy} = p g_{yy},$$

$$T_{zz} = p g_{zz}.$$

Conviene aclarar aquí que p se toma negativa cuando hay expansión y positiva cuando hay contracción.

En realidad el tensor de energía momento nos describe magnitudes físicas cuando es escrito en forma mixta, o sea

$$\begin{aligned} T_i^k &= \sum_{j=t,x,y,z} T_{ij} g^{jk} = \sum_{j=t,x,y,z} [(\rho + p)U_i U_j g^{jk} + p g_{ij} g^{jk}] \\ &= (\rho + p)U_i U^k + p \delta_i^k, \end{aligned}$$

donde g^{jk} es la matriz inversa de g_{jk} , $U^k = U_j g^{jk}$ y δ_i^k es la delta de Kronecker. En esta representación, tenemos que las componentes no nulas del tensor son:

$$T_t^t = -\rho,$$

$$T_x^x = p,$$

$$T_y^y = p,$$

$$T_z^z = p.$$

Una vez que tenemos ésto, queda solamente aplicar la geometría y obtener las ecuaciones de Einstein mediante la relación

$$G_{ik} = -8\pi GT_{ik}.$$

Usando la ecuación (3.5) vemos que las componentes no nulas del tensor de Ricci, definido en el capítulo anterior, están dadas por

$$R_{tt} = -\frac{3\ddot{R}(t)}{R(t)}g_{tt},$$

$$R_{xx} = -\frac{R(t)\ddot{R}(t) + 2\dot{R}(t)^2 + 2k}{R(t)^2}g_{xx},$$

$$R_{yy} = -\frac{R(t)\ddot{R}(t) + 2\dot{R}(t)^2 + 2k}{R(t)^2}g_{yy},$$

$$R_{zz} = -\frac{R(t)\ddot{R}(t) + 2\dot{R}(t)^2 + 2k}{R(t)^2}g_{zz}.$$

Por lo tanto la curvatura escalar estará dada por

$$K = -\frac{6(R(t)\ddot{R}(t) + k + \dot{R}(t)^2)}{R(t)^2}.$$

Agrupando estos últimos dos resultados, obtenemos que las componentes no nulas del tensor de Einstein están dadas por

$$G_{tt} = \frac{3(\dot{R}(t)^2 + k)}{R(t)^2}g_{tt},$$

$$G_{xx} = \frac{2R(t)\ddot{R}(t) + \dot{R}(t)^2 + k}{R(t)^2}g_{xx},$$

$$G_{yy} = \frac{2R(t)\ddot{R}(t) + \dot{R}(t)^2 + k}{R(t)^2}g_{yy},$$

$$G_{zz} = \frac{2R(t)\ddot{R}(t) + \dot{R}(t)^2 + k}{R(t)^2}g_{zz}.$$

Finalmente las ecuaciones de Einstein se escriben

$$3(\dot{R}(t)^2 + k) = 8\pi G\rho R(t)^2, \quad (3.9)$$

$$2R(t)\ddot{R}(t) + \dot{R}(t)^2 + k = -8\pi GpR(t)^2. \quad (3.10)$$

Podemos reescribir éstas ecuaciones de la siguiente forma,

$$H(t)^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{R(t)^2}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (3.12)$$

donde $H(t)$ es el parámetro de Hubble. La ecuación (3.11) se puede interpretar de la siguiente forma [8]: supongamos que $-k/R(t)^2$ como la "energía total" del universo, entonces podemos ver que la evolución del mismo está gobernada por la competencia entre la energía potencial $8\pi G\rho/3$ y el término cinético $H(t)^2$. Es por ello que el comportamiento del universo va a estar conectado con el valor de k . Para $k = 1$, el universo va a recolapsar en un tiempo finito; para $k = 0, -1$ el universo se va a expandir por siempre.

De (3.11) y de (3.12) se puede obtener la ecuación de evolución para ρ :

$$\dot{\rho} = -3H(t)(\rho + p). \quad (3.13)$$

3.1.5. Definición de los parámetros cosmológicos

Además del parámetro de Hubble es usual definir otros parámetros cosmológicos medibles [8].

La ecuación (3.11) puede ser usada para definir una *densidad crítica* (ρ_c). Ésta nos da una idea de cual sería la densidad asociada a un universo espacialmente plano con el mismo parámetro de Hubble que el universo actual. Por lo tanto tomemos $k = 0$ en (3.11) y definamos la densidad crítica como

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

El parámetro de *densidad cosmológica* (Ω) está definido en función de la densidad crítica. Éste nos da una idea de que tan plano es nuestro universo y está definido por:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}.$$

Es conveniente distinguir entre las distintas contribuciones para la densidad de energía: densidad de materia Ω_m , densidad de energía debida a radiación Ω_r y la densidad de energía de vacío Ω_v . Teniendo en cuenta ésto podemos escribir (3.11) de la siguiente forma:

$$k/R(t)^2 = H(t)^2(\Omega - 1) = H(t)^2(\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v - 1),$$

donde cada Ω_i se define:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}.$$

Actualmente, por información recogida de la explosión de supernovas, se puede ver que la densidad dominante es la de vacío ($\Omega_v \simeq 0,7$), siguiendo

la de materia ($\Omega_m \simeq 0,3$). La densidad Ω_r es prácticamente despreciable ($\Omega_r \simeq 0,05$).

Otro parámetro relevante es el *factor de desaceleración*, definido por

$$q \equiv -\frac{\ddot{R}(t)R(t)}{\dot{R}(t)^2},$$

que nos da información sobre como se expande el universo, si lo hace aceleradamente ($q < 0$) o desaceleradamente ($q > 0$). Actualmente se sabe que $q < 0$ ($q \simeq -1/2$).

Por medio de las ecuaciones (3.11) y (3.12), para un universo plano, podemos escribir al factor de desaceleración como

$$q = \frac{\rho + 3p}{2\rho_c} = \frac{1 + 3\omega}{2}\Omega.$$

en donde $p = \omega\rho$. De la primera igualdad de esta última ecuación, para un universo espacialmente plano, obtenemos

$$p = \left(\frac{2}{3}q - \frac{1}{3}\right)\rho = -\left(\frac{2\dot{H}}{3H^2} + 1\right)\rho. \quad (3.14)$$

3.1.6. Historia del universo. Solución particular del Modelo Estándar

En esta sección vamos a dar la solución a la ecuación (3.11) cuando uno solo de los componentes (radiación, materia o vacío) domina la densidad de energía [13]. Consideremos la siguiente ecuación de estado para la materia:

$$p = \omega\rho. \quad (3.15)$$

Suponiendo un universo plano, las condiciones que pedimos al principio implican que ω es constante. A partir de la ecuación (3.13), obtenemos [4]

$$\rho \propto R(t)^{-3(1+\omega)}. \quad (3.16)$$

Usando esto en la ecuación (3.11) y resolviendo, se ve que

$$R(t) \propto t^{2/(3(1+\omega))}. \quad (3.17)$$

De aquí se pueden estudiar tres casos particulares: *Universo dominado por radiación*, *Universo dominado por materia* y *Universo dominado por vacío*.

Si admitimos que al comienzo el universo era caliente y denso, es apropiado suponer que su estado era el correspondiente a un gas de radiación para el cual $\omega = 1/3$. Por lo tanto, sustituyendo en (3.16) y (3.17), obtenemos:

$$\rho \propto R^{-4}, \quad R(t) \propto t^{1/2} \Rightarrow H = \frac{1}{2t}.$$

Avanzando en el tiempo la materia empieza a dominar la energía por sobre la radiación. Por lo tanto un gas sin presión ($\omega = 0$) da las siguientes relaciones:

$$\rho \propto R^{-3}, \quad R(t) \propto t^{2/3} \Rightarrow H = \frac{2}{3t}.$$

De esta manera por la relación que hay entre ρ y $R(t)$:

$$\rho \propto \begin{cases} R(t)^{-4} & \text{radiación} \\ R(t)^{-3} & \text{materia} \end{cases}$$

Esto significa que si inicialmente el universo hubiera estado dominado por radiación ($\rho_r \gg \rho_m$), posteriormente (al crecer $R(t)$) la situación se invertiría y la componente de densidad de energía debida a materia pasaría a ser más importante que la de radiación ($\rho_m \gg \rho_r$).

Para el caso en que $\omega = -1$ se dice que el universo está dominado por vacío. Un universo de este tipo tendría una ecuación de estado $\rho + p = 0$.

Algunos autores [12] agregan a las ecuaciones de Einstein una constante, denominada constante cosmológica (Λ), asociada a una energía de vacío y que actúa de manera tal que a las ecuaciones (3.11) y (3.12) se les debe adicionar un término proporcional a la constante Λ . Así obtienen que

$$R(t) \propto e^{t\sqrt{\Lambda/3}},$$

lo que da una expansión exponencial del universo.

Nosotros preferimos pensar de la siguiente forma: dado que la ecuación (3.13) da $\rho = \rho_v = cte$ decimos que ρ_v es la densidad de energía de vacío y usamos ésto para resolver (3.11) y (3.12), obteniendo

$$R(t) \propto e^{t\sqrt{8\pi G\rho_v/3}}.$$

lo que también nos da una expansión exponencial para el universo.

3.1.7. Problemas del modelo cosmológico estándar

Hasta aquí hemos visto los lineamientos generales del modelo cosmológico estándar. Aunque este modelo tiene un gran poder predictivo, presenta ciertas dificultades [2] [5] para explicar algunas propiedades del universo cuando $t < 10^{-35}$ seg. A estas dificultades se las denominan *problemas del modelo cosmológico estándar*.

A continuación veremos los dos problemas más conocidos del modelo estándar.

a) Problema de planaridad

De (3.11) se puede ver que:

$$|\Omega - 1| = \frac{|\rho - \rho_c|}{\rho_c} = \frac{|k|}{\dot{R}(t)^2},$$

donde ρ es la densidad de energía en el universo y ρ_c es la densidad crítica de energía para un universo plano con el mismo parámetro de Hubble $H(t)$.

Suponiendo $k \neq 0$ obtenemos

$$|\Omega - 1| = \dot{R}(t)^{-2}.$$

Por otro lado, $R(t)^2 \sim t$ en la era del universo dominado por radiación. Por lo tanto, se puede ver que la cantidad $|\Omega - 1|$ era extremadamente pequeña para $t < 10^{-35}$ seg, dado que, por ejemplo si suponemos que actualmente el valor de Ω se encuentra aproximadamente en el intervalo $0,1 < \Omega < 2$, entonces en el universo primitivo $|\Omega - 1| < 10^{-59}$.

Esto implica que si la densidad de energía del universo al comienzo fuera, por $10^{-55}\rho_c$ mayor que la densidad crítica, el universo sería cerrado y luego de un tiempo del orden del tiempo de Planck, recolapsaría sobre sí mismo. Por otro lado, si la densidad de energía inicial del universo hubiese sido $10^{-55}\rho_c$ menor que la densidad crítica, el universo sería abierto y la densidad de energía en nuestros días sería despreciable frente a la densidad crítica que medimos. Si se hubiera dado cualquiera de los casos anteriores en este momento no existiría nada de lo que hoy conocemos. La única forma de explicar esto, es que la densidad inicial de energía del universo haya sido extremadamente cercana a la densidad crítica. El modelo estándar no es capaz de explicar por que en el universo primitivo $|\Omega - 1| \ll 1$. A éste problema se lo conoce como problema de planaridad.

b) Problema del horizonte

Estudios de la radiación térmica de fondo muestran que para tiempos del orden de $t \sim 10^5$ años el universo era aproximadamente homogéneo e isótropo en escalas de longitud del orden de t (en años luz), con temperaturas T que diferían de una región a otra en un orden de $10^{-4}T$. Es posible ver que la parte observable del universo actual consiste de alrededor de 10^6 regiones que estaban causalmente desconectas a $t \sim 10^5$. La probabilidad de que las temperaturas estén correlacionadas de esa forma entre esas regiones es del orden de $10^{-24} - 10^{-30}$. Es difícil de encontrar una explicación para esto mediante el escenario del modelo estándar. A este problema se lo denomina problema del horizonte.

3.2. Inflación

El escenario inflacionario fue concebido para explicar los problemas del modelo cosmológico estándar [4]. En general, inflación describe la etapa inicial de la vida del universo, en la que el factor de escala $R(t)$ crece alrededor

de 10^{26} ordenes de magnitud, lo que permite resolver los problemas de planaridad y de horizonte. Dicho crecimiento hace que el término de las ecuaciones de Einstein $k/R(t)^2$ sea prácticamente nulo despues de inflación, resolviendo asi el problema de planaridad; y que las zonas que antes de inflación estaban conectadas causalmente se desconecten para actualmente conectarse de nuevo, lo que resuelve el problema del horizonte. Se explica este crecimiento por el movimiento de un campo escalar masivo ϕ (masivo para que posea inercia), denominado campo inflatón, a lo largo de una curva de potencial $V(\phi)$ elegida convenientemente.

El inflatón se encuentra inicialmente en un estado excitado y comienza a decaer rodando a lo largo de la curva de potencial. A medida que rueda la energía que pierde se transforma en materia, cuya estructura va a estar dada por el movimiento del campo. Si la curvatura del potencial es muy pequeña, esto es, el potencial es muy plano, se dice que el campo va a rodar lentamente.

A continuación veremos el formalismo para uno de los modelos de inflación más conocidos y aceptados hoy en día: *inflación caótica* [2] [16].

3.2.1. Inflación caótica: aproximación semiclásica

Asumamos que el universo está descrito por un campo escalar (ϕ), mínimamente acoplado con la gravedad y que se encuentra sujeto a un potencial $V(\phi)$. Por lo tanto la densidad lagrangiana para este campo estará dada por [17]

$$\mathcal{L}(\phi, \frac{d\phi}{dx_i}) = -\sqrt{-g} \left[\sum_{i,k=t,x,y,z} \frac{1}{2} g^{ik} \frac{d\phi}{dx_i} \frac{d\phi}{dx_k} + V(\phi) \right],$$

donde g es el determinante del tensor métrico. Notemos que $\phi = \phi(t, x, y, z)$.

Si consideramos que el espacio-tiempo posee una estructura dada por la métrica de Robertson-Walker para un espacio plano ($k = 0$)

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -1, \\ g_{xx} &= g_{yy} = g_{zz} = R^2(t), \\ g_{ij} &= 0 \quad \text{si } i \neq j, \end{aligned} \tag{3.18}$$

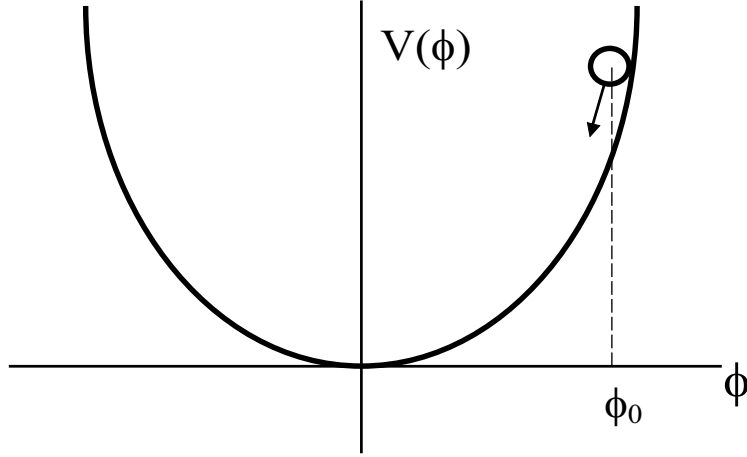
la ecuación de movimiento para ϕ según las relaciones de Euler-Lagrange es

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{R(t)^2} \nabla^2 \phi + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \tag{3.19}$$

en donde el punto indica la derivada respecto del tiempo t , $H = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$ y los operadores diferenciales están definidos por

$$\nabla = \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz} \right),$$

Figura 2



$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right).$$

Por otro lado consideremos la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L}.$$

Hacemos ahora una analogía con mecánica clásica, podemos asumir para el universo que el hamiltoniano es el de un gas ideal dentro de una esfera. Éste va estar dado por la densidad de energía por el volumen de esa esfera. Formalmente

$$\mathcal{H} = R(t)^3 \hat{\rho},$$

donde $\hat{\rho}$ es el operador densidad de energía.

Haciendo las cuentas es posible ver que

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + \frac{1}{R(t)^2}(\nabla\phi)^2) + V(\phi).$$

Por lo tanto, si volvemos a las ecuaciones de Einstein, y haciendo $G = M_p^{-2}$ ($M_p = 1,2 \times 10^{19}$ GeV es la masa de Planck) obtenemos:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \langle \hat{\rho} \rangle = \frac{4\pi}{3M_p} \left\langle \dot{\phi} + \frac{1}{R(t)^2}(\nabla\phi)^2 + 2V(\phi) \right\rangle, \quad (3.20)$$

Las ecuaciones (3.19) y (3.20), son las ecuaciones de movimiento para el campo escalar en un potencial $V(\phi)$. La discusión del escenario inflacionario se hace en base al análisis clásico de estas ecuaciones en el caso de un campo escalar espacialmente homogéneo y curvatura espacial nula aún sin asumir rodadura lenta. Durante el período inflacionario $\ddot{R}(t) > 0$, y por lo tanto

el universo tiene una expansión acelerada. Cuando este período termina, el campo comienza a oscilar rápidamente y su energía potencial es convertida en energía térmica. Éste es en general el escenario inflacionario sin considerar los efectos cuánticos. La idea aquí es incluir los efectos cuánticos en una teoría clásica efectiva donde éstos aparezcan como fluctuaciones.

Siguiendo esta idea, haremos una aproximación semiclásica [16]. Supondremos que se puede hacer la siguiente descomposición para el campo

$$\phi(x, y, z, t) = \phi_c(t) + \delta\phi(x, y, z, t),$$

donde $\phi_c(t)$ es el campo inflatón, tal que

$$\langle \phi_c \rangle = \langle \phi \rangle,$$

y $\delta\phi(x, y, z, t)$ son fluctuaciones cuánticas pequeñas que tienen las siguientes propiedades:

$$\langle \delta\phi(x, y, z, t) \rangle = \langle \dot{\delta\phi}(x, y, z, t) \rangle = 0.$$

Notemos que pedir esto equivale a decir que el proceso estocástico dado por $\phi(x, y, z, t)$ lo aproximamos por un proceso continuo que sólo depende del tiempo $\phi_c(t)$ más una perturbación suave $\delta\phi(x, y, z, t)$ de media 0.

Si reemplazamos a $\phi(x, y, z, t)$ por $\phi_c(t) + \delta\phi(x, y, z, t)$ en la ecuación (3.19), y considerando el desarrollo perturbativo:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\phi} &\equiv V'[\phi_c(t) + \delta\phi(x, y, z, t)] \\ &= V'[\phi_c(t)] + \sum_n \frac{1}{n!} V^{(n+1)}[\phi_c(t)] [\delta\phi(x, y, z, t)]^n, \end{aligned}$$

donde $V^{(n)} = d^n V / d\phi^n$, obtenemos

$$\ddot{\phi}_c(t) + 3H\dot{\phi}_c + V'(\phi_c) + \delta\ddot{\phi} - \frac{1}{a(t)^2} \nabla^2 \delta\phi + \sum_n \frac{1}{n!} V^{n+1}[\phi_c(t)] (\delta\phi)^n. \quad (3.21)$$

Si ahora utilizamos la ecuación (3.20) y realizamos un desarrollo perturbativo para $V(\phi)$ similar al anterior:

$$\begin{aligned} V[\phi_c(t) + \delta\phi(x, y, z, t)] &= \\ &= V(\phi_c(t)) + \sum_n \frac{1}{n!} V^{(n)}(\phi_c(t)) (\delta\phi(x, y, z, t))^n. \end{aligned}$$

Luego de hacer las cuentas, llegamos a

$$H^2 = H_c^2 + \frac{8\pi}{3M_p} \left\langle \frac{1}{2} \delta\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2R(t)^2} (\nabla^2(\delta\phi)) + \sum_n \frac{1}{n!} V^{(n)}(\phi_c(t)) (\delta\phi)^n \right\rangle,$$

donde

$$H_c = \frac{8\pi}{3M_p} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}_c^2 + V(\phi_c) \right). \quad (3.22)$$

Como las ecuaciones de campo que vamos a utilizar corresponden a escala cosmológica, podemos asumir que $H \approx H_c$. Además, considerando $n = 1$ (fluctuaciones cuánticas pequeñas), de (3.21) y (3.22), obtenemos las siguientes tres ecuaciones:

$$\ddot{\phi}_c(t) + 3H\dot{\phi}_c + V'(\phi_c) = 0, \quad (3.23)$$

$$\delta\ddot{\phi} - \frac{1}{a(t)^2} \nabla^2 \delta\phi + \sum_n \frac{1}{n!} V^{n+1}[\phi_c(t)] (\delta\phi)^n = 0, \quad (3.24)$$

$$H_c^2 = \frac{8\pi}{3M_p} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}_c^2 + V(\phi_c) \right). \quad (3.25)$$

que son las ecuaciones que definen la dinámica del sistema. Notemos que (3.23) describe la dinámica del inflatón, (3.24) da la dinámica de las fluctuaciones cuánticas y (3.25) es la ecuación de Einstein que determina $R(t)$ para un dado $V(\phi_c)$.

En estos términos, la ecuación (3.14), que nos da como se relacionan la presión y la densidad de energía, se transforma en

$$\langle \hat{p} \rangle = - \left(\frac{2\dot{H}_c}{3H_c^2} + 1 \right) \langle \hat{\rho} \rangle, \quad (3.26)$$

que establece una relación entre los valores de espectación de ambas cantidades.

Trabajando con (3.25) y (3.23), podemos caracterizar el comportamiento del parámetro de Hubble y el campo inflatón por medio de la relación

$$\dot{\phi}_c = - \frac{M_p^2}{4\pi} \left. \frac{dH}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_c}. \quad (3.27)$$

Así el potencial para este tipo de dinámica está dado por

$$V(\phi_c) = \frac{3M_p^2}{8\pi} \left(H_c^2 - \frac{M_p^2}{12\pi} \left(\left. \frac{dH}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_c} \right)^2 \right). \quad (3.28)$$

Ilustremos como funciona este formalismo para un potencial del tipo [16]

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda^2}{24} \phi^4 + \Lambda,$$

donde m es la masa del campo inflatón, $\lambda \ll 1$ describe la autointeracción. La constante $\Lambda > 0$

$$\Lambda = \frac{3m^4}{2\lambda^2} + \frac{m^2 M_p^2}{12\pi} + \frac{M_p^4 \lambda^2}{864\pi^2},$$

constituye el mínimo de potencial. Algunos autores [16] asocian esta constante con la constante cosmológica. El tratamiento es análogo para ambos casos. Haciendo las cuentas, se puede ver a partir de (3.28) que

$$H_c(\phi_c) = \frac{\sqrt{\pi}\lambda}{3M_p}\phi_c^2 + \frac{2m^2\sqrt{\pi}}{M_p\lambda} + \frac{M_p\lambda}{18\sqrt{\pi}},$$

lo que nos da, utilizando (3.27), la evolución para ϕ_c

$$\phi_c(t) = \phi_0 e^{-\frac{\lambda M_p}{6\sqrt{\pi}}(t-t_0)},$$

con $\phi_0 = \phi(t_0)$. Por lo tanto el parámetro de Hubble estará dado por

$$H_c(t) = \frac{\sqrt{\pi}\lambda}{3M_p}\phi_0^2 e^{-\frac{\lambda M_p}{3\sqrt{\pi}}(t-t_0)} + \frac{2m^2\sqrt{\pi}}{M_p\lambda} + \frac{M_p\lambda}{18\sqrt{\pi}}.$$

Es posible ver que el factor de escala dado por este parámetro de Hubble está dado por

$$\frac{R(t)}{R_0} = e^{\left(-\frac{\phi_0^2\pi}{M_p^2}e^{-\frac{\lambda M_p}{3\sqrt{\pi}}(t-t_0)} + \left(\frac{2m^2\sqrt{\pi}}{M_p\lambda} + \frac{M_p\lambda}{18\sqrt{\pi}}\right)(t-t_0) + \frac{\phi_0^2\pi}{M_p^2}\right)}.$$

Por lo tanto, ajustando debidamente los parámetros podemos obtener un factor de escala que al inicio de la evolución del universo creció lo suficiente como para resolver los problemas del modelo cosmológico estándar.

Capítulo 4

Teoría de materia inducida

En este capítulo estudiaremos la teoría de materia inducida propuesta por Paul S. Wesson y J. Ponce de León entre otros [24]. En ella se puede ver que es posible obtener propiedades de la materia como resultados de geometría Riemanniana en 5 dimensiones sin hacer suposiciones sobre la topología de la última coordenada. Aunque es posible extender esta teoría hacia distintas ramas diferentes, nosotros nos concentraremos en el aspecto cosmológico de la misma, siguiendo las ideas expuestas en el libro de P.S. Wesson *Space Time Mater. Modern Kaluza Klein Theory*[7].

4.1. Formalismo

En 5-dimensiones tenemos que las ecuaciones de campo para el tensor de Ricci en un espacio plano vienen dadas por

$$R_{AB} = 0, \quad (4.1)$$

donde los índices A y B van de $0 \dots 4$. Equivalentemente las ecuaciones del tensor de Einstein en 5-D están dadas por:

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2}Rg_{AB} = 0. \quad (4.2)$$

Wesson [7] propone interpretar a (4.2) diciendo que el universo esta inmerso en un espacio pentadimensional con vacío aparente y supone además, que las ecuaciones de Einstein están contenidas en esta condición. Entonces, como de la teoría de la Relatividad general en 4-D, las ecuaciones de campo están dadas por las relaciones ya conocidas

$$G_{ik} = -8\pi GT_{ik} \quad i, k = 0 \dots 3. \quad (4.3)$$

La suposición anterior es equivalente a pedir que (4.3) sea un subconjunto de (4.2) con un tensor de energía momento efectivo o inducido T_{ik} que contiene las propiedades clásicas de la materia.

Esto es posible de explicar gracias al teorema de Campbell [20] que dice que toda variedad Riemanniana n -dimensional, puede ser inmersa en otra variedad Riemanniana plana ($R_{A,B} = 0$) $(n + 1)$ -dimensional, lo que es fundamental para explicar que las ecuaciones de campo en 4-D con fuentes pueden ser inmersas localmente en ecuaciones de campo en 5-D, asociadas a una métrica plana. Por lo tanto la física métrica en 4-D puede ser inmersa en una física métrica en 5-D.

4.2. Aplicaciones a cosmología

Hay pocas soluciones, de tipo cosmológico, conocidas para (4.2) [25], es decir, hay escasas métricas en 5-D que sean solución de (4.2) y que se puede reducir a una métrica de Robertson-Walker. Sin embargo muchas de éstas no contienen la dependencia en la última coordenada y desde el punto de vista de la materia inducida son muy restrictivas. Veamos como hacer el paso desde las ecuaciones de campo en 5-D a 4-D. Para ello consideremos una métrica del tipo

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -e^\nu, \\ g_{xx} &= g_{yy} = g_{zz} = e^\omega, \\ g_{ll} &= e^\mu, \\ g_{ij} &= 0 \quad \text{si } i \neq j, \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde las coordenadas espaciales fueron aumentadas por una nueva coordenada l . Si buscamos soluciones cosmológicas, los coeficientes de la métrica ν , ω y μ dependen en general de t y de l . Las derivadas parciales respecto de t se notarán con un punto mientras que las derivadas respecto de l con una estrella sobre la función.

Haciendo las cuentas podemos ver que las componentes del tensor de Einstein en 5-D están dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} G_{tt} &= -\frac{3}{4} \left(e^{\nu-\mu} \left(\dot{\omega}^* \mu^* - 2 \dot{\omega}^{*2} - 2 \dot{\omega}^{**} \right) + (\dot{\mu} \dot{\omega} + \dot{\omega}^2) \right), \\ G_{tl} &= \frac{3}{4} \left(2 \dot{\omega}^* + \dot{\omega} \dot{\omega}^* - \dot{\nu} \dot{\omega} - \dot{\mu} \dot{\omega}^* \right), \\ G_{xx} = G_{yy} = G_{zz} &= \frac{1}{4} e^{\omega-\nu} \left(4 \ddot{\omega} + 3 \dot{\omega}^2 - 2 \dot{\nu} \dot{\omega} + 2 \dot{\mu} \dot{\omega} - \dot{\nu} \dot{\mu} + \dot{\mu}^2 + 2 \dot{\mu} \right) - \\ &\quad \frac{1}{4} e^{\omega-\mu} \left(2 \dot{\nu} \dot{\omega}^* + 3 \dot{\omega}^{*2} + 4 \dot{\omega}^{**} - 2 \dot{\omega}^* \mu^* + \dot{\nu}^2 - \dot{\nu} \dot{\mu} + 2 \dot{\nu}^{**} \right), \\ G_{ll} &= -\frac{3}{4} \left(\left(\dot{\omega}^{*2} + \dot{\nu} \dot{\omega}^* \right) + e^{\mu-\nu} \left(\dot{\omega} \dot{\nu} - 2 \ddot{\omega} - 2 \dot{\omega}^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Siguiendo la idea de que el tensor de energía momento efectivo en 4-D está contenido de las ecuaciones anteriores, debemos asociar términos de

éstas con las componentes del tensor. Como estamos en el caso cosmológico tomaremos

$$T_{ik} = (\rho + p)U_i U_k + p g_{ik},$$

donde U_i es la tetra-velocidad, dada en componentes por:

$$U_t = -1, \quad U_x = U_y = U_z = 0.$$

Por lo tanto las componentes no nulas del tensor de energía momento son:

$$T_{tt} = \rho e^\nu,$$

$$T_{xx} = T_{yy} = T_{zz} = p e^\omega,$$

Escrito en forma mixta: $T_t^t = -\rho$ y $T_x^x = T_y^y = T_z^z = p$.

Entonces, para incluir este tensor, agrupamos los términos de las ecuaciones para G_{tt} , G_{xx} , G_{yy} y G_{zz} que contienen al nuevo coeficiente μ y a las derivadas respecto de l y los identificamos con la densidad (ρ) en G_{tt} y la presión (p) en G_{xx} , G_{yy} y G_{zz} . Así definimos

$$(8\pi G)\rho \equiv -\frac{3}{4}e^{-\nu}\dot{\omega}\dot{\mu} + \frac{3}{2}e^{-\mu} \left(\overset{**}{\omega} + \overset{*}{\omega}{}^2 - \frac{1}{2} \overset{**}{\omega}\mu \right), \quad (4.5)$$

$$(8\pi G)p \equiv \frac{1}{4}e^{-\nu} (2\dot{\mu}\dot{\omega} - \dot{\nu}\dot{\mu} + \dot{\mu}^2 + 2\ddot{\mu}) - \frac{1}{4}e^{-\mu} \left(2 \overset{*}{\nu}\overset{*}{\omega} + 3 \overset{*}{\omega}{}^2 + 4 \overset{**}{\omega} - 2 \overset{*}{\omega}\mu + \overset{*}{\nu}{}^2 - \overset{*}{\nu}\mu + 2 \overset{**}{\nu} \right). \quad (4.6)$$

Estas relaciones nos dan las propiedades de la materia inducidas por las propiedades de la geometría en 5-D.

Como $G_{AB} = 0$ entonces, de las componentes G_{tt} y G_{xx} , podemos obtener

$$\begin{aligned} (8\pi G\rho) &= \frac{3}{4}e^{-\nu}\dot{\omega}^2, \\ (8\pi Gp) &= -e^{-\nu} \left(\ddot{\omega} + \frac{3}{4}\dot{\omega}^2 - \frac{1}{2}\dot{\nu}\dot{\omega} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como se puede apreciar aquí, ρ debe ser positiva, mientras que p puede, en principio, ser negativa.

Hasta ahora hemos visto la idea en general, nos concentraremos ahora en aplicarla al caso cosmológico. La idea será ver como entra aquí el modelo cosmológico estándar.

Siguiendo a Wesson [7], un sistema apropiado para hacer cosmología es el que nos induce la siguiente métrica, dada originalmente por J. Ponce de León [25], que es solución de $G_{AB} = 0$:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -l^2, \\ g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} &= t^{2\alpha} l^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}, \\ g_{ll} &= \frac{1}{(\alpha-1)^2} t^2, \\ g_{ij} &= 0 \quad \text{si } i \neq j, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde α es una constante que depende de las propiedades de la materia. Si tomamos a $l = cte$ obtenemos un espacio de Robertson-Walker espacialmente plano en 4-D (que es un subespacio de la variedad total).

Una vez que tenemos la métrica podemos hacer un análisis más detallado por medio de las ecuaciones para la presión y la densidad dadas en (4.7) con $l = cte$. De ellas se obtiene

$$8\pi G\rho = \frac{3\alpha^2}{l^2 t^2}, \quad 8\pi Gp = \frac{2\alpha - 3\alpha^2}{l^2 t^2},$$

de donde se puede ver:

$$p = \left(\frac{2 - 3\alpha}{3\alpha} \right) \rho.$$

Notemos aquí la analogía que podemos hacer de esta última ecuación y (3.15) del capítulo 3, tomando

$$\omega^1 = \frac{2 - 3\alpha}{3\alpha},$$

ambas son iguales. En función de ésto se puede realizar un análisis similar al del modelo cosmológico estándar que hicimos en el capítulo anterior.

Lo interesante de este modelo es la interpretación que hace Wesson [7] de lo que es la coordenada l en nuestro mundo físico, o la consecuencia de la existencia de la misma. Si consideramos el intervalo asociado a la métrica (4.8) para un sistema de coordenadas comóviles en donde $l = cte$, obtenemos $dS = ldt$. Esto debe ser consistente con la dinámica de la partícula en 4-D donde el intervalo está dado por $ds = mdt$. Por lo tanto podemos interpretar a m en este modelo como la masa en reposo de la partícula que consideremos (notemos que aquí una partícula puede tener dimensiones galácticas).

Supongamos ahora que l no es constante y veamos la ecuación de movimiento para una partícula en 5-D. La partícula se va a mover a lo largo de una geodésica en el espacio pentadimensional. Por lo tanto la ecuación de movimiento de la misma estará dada por

$$\sum_{C=t,x,y,z,l} \frac{dU_C}{dS} + \Gamma_{AB}^C U_A U_B = 0, \quad A, B = t, x, y, z, l. \quad (4.9)$$

donde

$$U_t = \frac{dt}{dS}, \quad U_x = \frac{dx}{dS}, \quad U_y = \frac{dy}{dS}, \quad U_z = \frac{dz}{dS}, \quad U_l = \frac{dl}{dS}.$$

Aquí usamos S en mayúscula para aclarar que es el elemento de línea en 5-D. Tomando coordenadas comóviles del tipo convencional ($U_x = U_y = U_z = 0$), obtenemos de (4.9) las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dU_t}{dS} + \frac{tU_l^2}{l^2(\alpha - 1)^2} + \frac{2}{l}U_t U_l = 0,$$

¹No confundir este ω con el $\omega(l, t)$ que estamos utilizando para la métrica en este capítulo.

$$\frac{dU_l}{dS} + \frac{(\alpha - 1)^2 l U_t^2}{t^2} + \frac{2}{t} U_t U_l = 0,$$

a las que le tenemos que agregar la condición $g_{AB}U_A U_B = 1$, que nos dice que la curva está parametrizada en longitud de arco. O sea

$$l^2 U_t^2 - \frac{t^2}{(\alpha - 1)^2} U_l^2 = 1.$$

Resolviendo estas ecuaciones diferenciales, obtenemos:

$$U_t = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha(2 - \alpha)}l}, \quad U_l = \mp \frac{(\alpha - 1)^2}{\sqrt{\alpha(2 - \alpha)}t}.$$

El cociente entre estas cantidades $U_l/U_t = dl/dt$, nos permite obtener que el cambio relativo de la nueva coordenada l respecto de t está dado por

$$\frac{dl}{dt} = -(\alpha - 1)^2 \frac{l}{t}.$$

De aquí se puede ver que, como $(\alpha - 1)^2 < 1$ en las épocas dominadas por radiación ($\alpha = 1/2$) y por materia ($\alpha = 3/2$), el cambio de la coordenada l respecto de t es pequeño. Sin embargo, necesariamente no debe ser cero. Por lo tanto si asumimos que la masa de la partícula está relacionada con la coordenada l , entonces ésta va a ir cambiando muy lentamente con el tiempo. Por otro lado, las partículas se mantienen a la misma distancia unas de otras (sistema comóvil).

Analicemos este resultado con nuestras mediciones. Consideremos esta última ecuación diferencial. Asumamos $l \propto m$ la masa de la partícula, entonces, en términos del tiempo actual $t_0 \sim 10^9$ años (supongamos $\alpha = 2/3$), obtenemos que

$$\frac{\dot{m}}{m} \sim \frac{1}{10^9 \text{ años}}.$$

Por lo tanto, vemos que el cambio en la masa sería actualmente inobservable.

Hagamos ahora un cambio de coordenadas, y definamos:

$$\tilde{t} = tl, \quad \tilde{x} = t^\alpha x, \quad \tilde{y} = t^\alpha y, \quad \tilde{z} = t^\alpha z, \quad \tilde{l} = (\alpha - 1)^2 t^{(\alpha-1)^2} l.$$

Como la pentavelocidad transforma como un vector ($\tilde{U}_A = (\frac{\partial \tilde{x}_A}{\partial x_B}) U_B$), las velocidades en el nuevo sistema de coordenadas serán

$$\tilde{U}_{\tilde{t}} = \mp \sqrt{2\alpha - \alpha^2}, \quad \tilde{U}_{\tilde{l}} = 0,$$

$$\tilde{U}_{\tilde{x}} = \mp \sqrt{\frac{1}{\alpha(2 - \alpha)}} \frac{\tilde{x}}{\tilde{t}}, \quad \tilde{U}_{\tilde{y}} = \mp \sqrt{\frac{1}{\alpha(2 - \alpha)}} \frac{\tilde{y}}{\tilde{t}}, \quad \tilde{U}_{\tilde{z}} = \mp \sqrt{\frac{1}{\alpha(2 - \alpha)}} \frac{\tilde{z}}{\tilde{t}}.$$

Vemos ahora que la componente relacionada con la energía de la velocidad es constante, que las correspondientes a (x, y, z) son finitas y que la

última componente es cero. Como la métrica transforma como un tensor, es posible ver que

$$\tilde{g}_{\tilde{t}\tilde{t}} = 2\alpha - \alpha^2.$$

Esto significa que, en el nuevo sistema de coordenadas hay un tiempo cósmico que es el mismo para todos los observadores, que las galaxias se mueven de acuerdo a la ley usual de expansión y que las energías y las masas son constantes (asumiendo $l=m$). En términos del tiempo cósmico \tilde{t} las ecuaciones de la presión y de la densidad quedan

$$8\pi G\rho = \frac{3\alpha^2}{l^2 t^2} \Rightarrow 8\pi G\rho = \frac{3\alpha^2}{\tilde{t}^2},$$

$$8\pi Gp = \frac{2\alpha - 3\alpha^2}{l^2 t^2} \Rightarrow 8\pi Gp = \frac{2\alpha - 3\alpha^2}{\tilde{t}^2},$$

que son muy similares a las obtenidas en el capítulo anterior para el modelo estándar.

Esto nos muestra que en la teoría de materia inducida, todas las transformaciones $x_A \rightarrow \tilde{x}_A(x_B)$ de coordenadas son igualmente válidas. Pero en la relatividad de 4-D, sólo $x_i \rightarrow \tilde{x}_i(x_k)$ son consideradas, y son un subconjunto de las otras. Así la transformación de coordenadas puede transformar la física, lo que nos lleva a pensar en que el principio de equivalencia es incompleto. Esta conclusión es consecuencia de que la física vista de distintos sistemas de referencias en 5-D no parece ser la misma ya que, como vimos, para un sistema la distancias entre las galaxias es constante y la masa de las mismas varía, pero para otro las galaxias se separan unas de otras y la masa es constante.

4.3. Inflación desde el punto de vista de Materia inducida

En esta sección estudiaremos inflación utilizando la teoría de materia inducida siguiendo el trabajo de M. Bellini [18]. Con este objetivo consideremos la métrica (4.4) y las ecuaciones (4.7). A partir de éstas es posible obtener el parámetro de Hubble como función de ω para un modelo inflacionario tal que $\dot{\mu}^* = 0$ y $\dot{\nu} = 0$.

Trabajando con (4.7) bajo estas suposiciones, vemos que:

$$p = - \left(\frac{4\ddot{\omega}}{3\dot{\omega}} + 1 \right) \rho. \quad (4.10)$$

Notemos que para $\ddot{\omega}/\dot{\omega} \leq 0^2$ y $|\ddot{\omega}/\dot{\omega}| \ll 1$ (o cero) esta ecuación describe un universo inflacionario.

²Recordemos que el punto denota derivada parcial respecto de t .

Comparando (4.10) con (3.26), vemos que el parámetro de Hubble estará dado por:

$$H_c = \frac{1}{2}\dot{\omega}. \quad (4.11)$$

Por lo tanto, podemos escribir el potencial escalar a partir de la métrica (4.4) en 5-D como:

$$V(\phi_c(t)) = \frac{3M_p^2}{32\pi} \left((\dot{\omega})^2 - \frac{2}{3}(\ddot{\omega}) \right).$$

Además, podemos ver la relación que existe entre ω y el campo inflatón. Partiendo de:

$$\frac{1}{2}\ddot{\omega} = \dot{H}_c = \left(\frac{dH}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_c} \right) \dot{\phi}_c,$$

y utilizando (3.27), llegamos a

$$\frac{1}{2}\ddot{\omega} = -\frac{4\pi}{M_p^2} \dot{\phi}_c^2 \Rightarrow \dot{\phi}_c^2 = -\frac{M_p^2}{8\pi} \ddot{\omega},$$

o, de otra forma:

$$\phi_c(t) = \frac{M_p}{\sqrt{8\pi}} \int \sqrt{-\ddot{\omega}} dt.$$

Recordemos que estamos bajo un escenario inflacionario, por lo tanto la raíz cuadrada está bien definida.

Especialicemos, a modo de ejemplo, para el caso de la métrica (4.8). En ella obtenemos [18] que

$$\omega = 2\alpha \ln(t) + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \ln(l),$$

donde $-1 \leq \alpha < 0$ dado que estamos en un modelo inflacionario. Por lo tanto, si hacemos las cuentas podemos ver que:

$$\phi_c(t) = -\frac{M_p}{2} \sqrt{\frac{-\alpha}{\pi}} \ln \left(\frac{t}{t_p} \right).$$

Notemos que para tiempos menores que el tiempo de Planck $t \ll t_p$ obtenemos que $\phi_c \rightarrow \infty$ como sucede generalmente en un escenario inflacionario.

Capítulo 5

Otra forma de ver inflación en 5-D.

5.1. Introducción

Como vimos en el capítulo anterior la teoría de materia inducida nos permite obtener modelos inflacionarios mediante el siguiente esquema: dada una métrica

$$\begin{aligned}g_{tt} &= -e^\nu(l), \\g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} &= e^\omega(l, t), \\g_{ll} &= e^\mu(t), \\g_{ij} &= 0, \quad \text{si } i \neq j,\end{aligned}\tag{5.1}$$

bajo las siguientes condiciones:

$$\ddot{\omega}/\dot{\omega} \leq 0, \quad |\ddot{\omega}/\dot{\omega}| \ll 1 \text{ (o cero)},$$

y tal que las componentes del tensor de Ricci son

$$R_{AB} = 0, \quad A, B = t, x, y, z, l.\tag{5.2}$$

Entonces, es posible obtener un modelo de inflación con un potencial dado por

$$V(\phi_c(t)) = \frac{3M_p^2}{32\pi} \left((\dot{\omega})^2 - \frac{M_p^2}{12\pi} (\ddot{\omega})^2 \right),$$

y un campo inflatón que satisface

$$\phi_c(t) = \frac{M_p}{\sqrt{8\pi}} \int \sqrt{-\ddot{\omega}} dt.$$

Esto se puede ver que funciona bien para modelos inflacionarios con factores de escala tipo ley de potencias (que vimos en el capítulo anterior),

o que presentan un crecimiento exponencial como el de de-Sitter [18]. Sin embargo, cuando la potencia del factor de escala no es una constante respecto del tiempo ($R(t) \sim t^{p(t)}$) este modelo deja de funcionar.

En éste capítulo¹daremos otro punto de vista sobre como obtener un modelo inflacionario a partir de la teoría de materia inducida.

5.2. Formalismo

Consideremos que nuestro universo está sumergido en un espacio pentadimensional plano. Tomemos sobre el espacio total un sistema de coordenadas tal que los puntos son representados por coordenadas $(N, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, L)$ y una métrica dada por los coeficientes

$$\begin{aligned} g_{NN} &= -L^2, \\ g_{\tilde{x}\tilde{x}} &= g_{\tilde{y}\tilde{y}} = g_{\tilde{z}\tilde{z}} = L^2 e^{2N} \\ g_{LL} &= 1, \\ g_{ij} &= 0 \quad \text{si } i \neq j, \end{aligned} \tag{5.3}$$

Aquí las coordenadas $(N, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ son adimensionales y la quinta (L) tiene unidades espaciales. Como de alguna forma debemos conectar ésto con lo que medimos, supondremos mas adelante, que la coordenada N sólo depende del tiempo cósmico t , o sea, $N = N(t)$. Nos paramos en un sistema tal que las coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ son constantes y proponemos el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= \tilde{x}L, & y &= \tilde{y}L, & z &= \tilde{z}L \\ t &= t(L, N), & l &= l(L, N), \end{aligned}$$

donde t corresponde al tiempo cósmico, (x, y, z) son las coordenadas espaciales que medimos y l juega el rol de quinta coordenada. A l la elegimos de forma una forma particular que detallaremos mas adelante. Por medio de este cambio de coordenadas obtenemos para una partícula en movimiento que la 5-velocidad está dada en componentes por

$$U_t = \frac{\partial t}{\partial L} U_L + \frac{\partial t}{\partial N} U_N, \tag{5.4}$$

$$U_x = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} U_{\tilde{x}} + \frac{\partial x}{\partial L} U_L, \tag{5.5}$$

$$U_y = \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} U_{\tilde{y}} + \frac{\partial y}{\partial L} U_L, \tag{5.6}$$

$$U_z = \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}} U_{\tilde{z}} + \frac{\partial z}{\partial L} U_L, \tag{5.7}$$

$$U_l = \frac{\partial l}{\partial N} U_N + \frac{\partial l}{\partial L} U_L. \tag{5.8}$$

¹Los resultados aquí expuestos fueron publicados en la revista Physics Letters B [19].

Recordemos que $U_{x_i} = dx_i/dS$. Luego proponemos una relación entre L y N ($L = L(N)$) y de la cual sale que $N = N(t)$. La justificación para esta elección de $L = L(N)$ será de la siguiente forma: consideremos el elemento de línea en el sistema de referencia $(N, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{L})$

$$(dS)^2 = -L^2(dN)^2 + L^2 e^{2N} (dR)^2 + (dL)^2, \quad (5.9)$$

donde $(dR)^2 = d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2$. Si ahora proponemos una relación entre L y N , o sea $L = L(N)$, podemos pensar

$$t = t(N, L) = t(N) \Rightarrow N = N(t).$$

y definimos la conexión entre N y t de la siguiente manera

$$t = \int L(N) dN,$$

por lo tanto

$$N = \int \frac{1}{L(t)} dt.$$

Reemplazando en (5.9) y tomando $l(L, N)$ de forma tal que cuando L pasa a $L(N)$ obtengamos $l = \text{cte}$. Así pasamos a una métrica efectiva tetradimensional

$$(dS)^2 = -(dt)^2 + L(N)^2 e^{2N(t)} \frac{(dR)^2}{(dr)^2} (dr)^2,$$

donde $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Dado que

$$x = L\tilde{x}, \quad y = L\tilde{y}, \quad z = L\tilde{z},$$

se desprende que $dR^2/dr^2 = 1/L^2$. Entonces, obtenemos para (5.9)

$$dS^2 = -dt^2 + e^{2 \int \frac{1}{L(t)} dt} (dr^2),$$

que es el elemento de línea en un espacio de Robertson-Walker, donde

$$\frac{R(t)}{R_0} = e^{\int \frac{1}{L(t)} dt}.$$

Notemos que aquí $H(t) = (L(t))^{-1}$. De esta deducción se desprende que $N(t)$ representa el número de desdoblamientos exponenciales y que $L(t)$ es el horizonte de Hubble.

El secreto para obtener distintos modelos inflacionarios radica en la elección de $L(N)$. Según sea ésta obtendremos un modelo en particular.

En este trabajo elegiremos a $L(N)$ de la siguiente forma. Miremos las ecuaciones para las geodésicas en el espacio descrito en (5.3). Haciendo las cuentas y suponiendo que $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ son constantes obtenemos

$$\frac{dU_N}{dS} = -\frac{2}{L} U_N U_L, \quad (5.10)$$

$$\frac{dU_L}{dS} = -L U_N^2. \quad (5.11)$$

Como ya sabemos, a estas ecuaciones les tenemos que agregar la condición de normalización

$$L^2 U_N^2 - U_L^2 = 1. \quad (5.12)$$

La solución general para (5.12) está dada por

$$U_L = -\sinh(S(N)),$$

$$U_N = \frac{1}{L} \cosh(S(N)).$$

Como queremos que además satisfaga la condición dada por las ecuaciones de la geodésica, haciendo

$$\begin{aligned} \frac{dU_N}{dS} &= -\frac{1}{L^2} \cosh(S(N))U_L + \frac{1}{L} \sinh(S(N))U_N \frac{dS(N)}{dN} \\ &= -\frac{1}{L} U_N U_L \left(1 + \frac{dS(N)}{dN} \right) \\ \frac{dU_L}{dS} &= -\cosh(S(N)) \frac{dS(N)}{dN} U_N = -\frac{dS(N)}{dN} L U_N^2. \end{aligned}$$

vemos que $S(N) = N$, lo que constituye un caso particular.

De esta elección para $S(N)$, la evolución de L va a estar dada por

$$\frac{dL}{dN} = -L \tanh(N), \quad (5.13)$$

y las velocidades en $4-D$ estarán dadas, si tomamos el sistema de referencia particular en el que $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ son constantes, por las expresiones

$$U_t = 2L(t)U_N = 2 \cosh(N(t)),$$

$$U_x = \tilde{x}U_L = -\tilde{x} \sinh(N(t)),$$

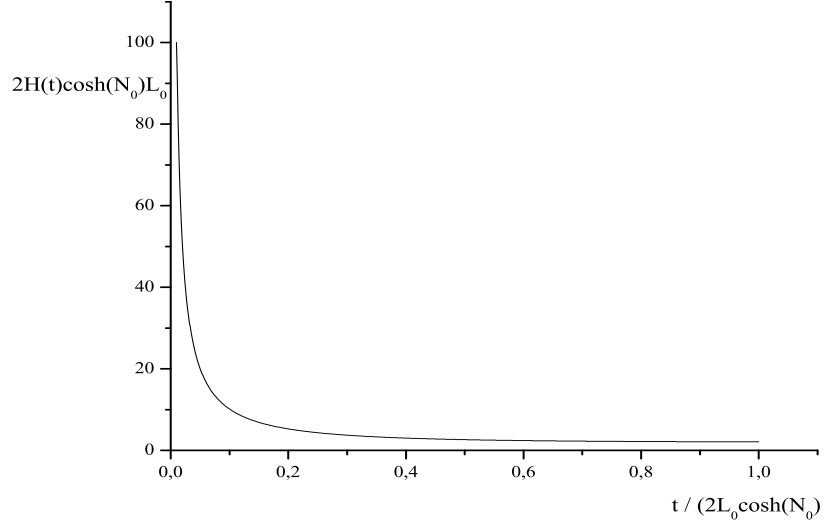
$$U_y = \tilde{y}U_L = -\tilde{y} \sinh(N(t)),$$

$$U_z = \tilde{z}U_L = -\tilde{z} \sinh(N(t)).$$

Notemos que para que haya expansión debemos pedir que $N(t) < 0$. Esto parece una contradicción, ya que como dijimos antes $N(t)$ es el número de desdoblamientos exponenciales. En realidad, este número está dado por $\Delta N = N(t) - N(t_0)$ con t_0 un tiempo de referencia. Integrando (5.13) llegamos a

$$L(N) = L_0 e^{-\int \tanh(N) dN} = L_0 \left(\frac{\cosh(N_0)}{\cosh(N)} \right),$$

donde L_0 y N_0 son constantes de integración.

Figura 3

Haciendo las cuentas obtenemos que

$$t = \int L(N)dN = 2L_0 \cosh(N_0) \operatorname{arctanh}(e^N),$$

por lo tanto $N(t)$ debe ser creciente, para que el tiempo también lo sea. Así, despejando $N(t)$, reemplazando en $L(N)$ y recordando que $H(t) = (L(t))^{-1}$, llegamos a

$$H(t) = \frac{1}{2 \cosh(N_0)L_0} \left(\tanh \left(\frac{t}{2 \cosh(N_0)L_0} \right) + \coth \left(\frac{t}{2 \cosh(N_0)L_0} \right) \right).$$

Lo que nos da un parámetro de Hubble (figura 3) que, mediante el ajuste de L_0 y N_0 es extremadamente grande para tiempos pequeños (como es de esperar para un universo inflacionario) y que luego desciende abruptamente para tiempos posteriores.

Notemos que este modelo es un caso particular. Cambiando $S(N)$ obtenemos otros modelos inflacionarios y es por ello que podemos, mediante este mecanismo, incluir los distintos modelos de inflación.

Capítulo 6

Cosmología en 5-D. Otro punto de vista

6.1. Introducción

En el capítulo 4 vimos una forma de obtener propiedades de la cosmología en 4-D considerando que nuestro universo está inmerso en un espacio 5-D plano. Aunque la idea es muy interesante, presenta problemas para el caso cosmológico.

En la teoría de materia inducida para pasar de 5 dimensiones a 4 se hace una proyección de la métrica de la siguiente forma:

$$5 - D \left\{ \begin{array}{l} g_{tt} = -e^{\nu(l,t)}, \\ g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = e^{\omega(l,t)}, \\ g_{ll} = e^{\mu(l,t)}, \\ g_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j, \\ i, j = t, x, y, z, l \end{array} \right. \Rightarrow 4 - D \left\{ \begin{array}{l} g_{tt} = -e^{\nu(l,t)}, \\ g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = e^{\omega(l,t)}, \\ g_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j, \\ i, j = t, x, y, z \end{array} \right.$$

donde l , para la métrica efectiva en 4-D, es constante. Sin embargo el tratamiento hecho por Wesson [7] es un poco confuso ya que después, al hacer el análisis del movimiento de una partícula, la coordenada l varía. Además notemos que en la métrica efectiva g_{tt} no es necesariamente igual a -1 (como sería de esperar para un modelo cosmológico), dado que este tipo de modelos están descritos por métricas de Robertson-Walker [13]. Es por ello que, por ejemplo, en el modelo mostrado en el capítulo 4 y dado por la métrica (4.7) nos da expresiones para la presión y densidad que son compatibles con las ecuaciones de Einstein únicamente en el caso $l = 1$, dado que si

$$8\pi G\rho = \frac{3\alpha^2}{l^2 t^2},$$

con $l = cte$. Entonces, reemplazando en la ecuación de Einstein (3.11) para

un universo espacialmente plano

$$H(t) = \frac{\alpha}{lt},$$

la expresión para la presión tendría que estar dada, según (3.12), por

$$p = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{2\alpha}{l} - \frac{3\alpha^2}{l^2} \right) \frac{1}{t^2},$$

en lugar de la dada por la teoría de materia inducida

$$p = \frac{1}{8\pi G} \frac{2\alpha - 3\alpha^2}{l^2 t^2}.$$

Ambas expresiones coinciden sólo si $l = 1$.

En este capítulo reinterpretaremos la teoría y definiremos la proyección de 5-D a 4-D de forma tal que la métrica inducida sea de Robertson Walker. A partir de allí presentaremos una nueva forma de hacer cosmología en 5-D en la que mostraremos como la existencia de la quinta coordenada, que se mueve libremente ¹, podría influir en la evolución de nuestro universo.

6.2. Formalismo

Siguiendo la teoría de materia inducida [7] asumamos que el universo esta inmerso en un espacio pentadimensional ² y supongamos que el tensor métrico del espacio total, que satisface la condición

$$G_{AB} = 0,$$

está dado por los coeficientes

$$\begin{aligned} g_{TT} &= -e^{\nu(L,T)}, \\ g_{XX} &= g_{YY} = g_{ZZ} = e^{\alpha(L,T)}, \\ g_{LL} &= e^{\mu(L,T)}, \\ g_{ij} &= 0 \quad \text{si } i \neq j, \\ i, j &= T, X, Y, Z, L, \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde las coordenadas L y T están relacionadas con la coordenada tiempo y X , Y y Z con las coordenadas espaciales.

Hagamos un cambio de coordenadas de la siguiente forma

$$(T, X, Y, Z, L) \Rightarrow (t, x, y, z, l),$$

¹O en principio, según algún vínculo que desconocemos

²Cuando decimos que el "universo esta inmerso en" estamos hablando del espacio matemático abstracto que representa o modela el universo en el contexto de una teoría matemática.

donde definimos a $t = t(T, L)$ como el tiempo cósmico que medimos nosotros, $X = x$, $Y = y$, $Z = z$ las coordenadas espaciales y $l = l(T, L)$ juega el rol de la quinta coordenada. Esta transformación satisface las condiciones

$$g_{tt} = -1, \quad g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = R^2(l, t). \quad (6.2)$$

Aquí $R(l, t)^2$ se propone según el modelo cosmológico en 4-D particular. Por la fórmula de cambio de coordenadas para tensores [11] obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial}{\partial L}, \\ \frac{\partial}{\partial l} &= \frac{\partial T}{\partial l} \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\partial L}{\partial l} \frac{\partial}{\partial L}, \\ \frac{\partial}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial Y} &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial Z} &= \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Recordando que

$$g_{x_i, x_j} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle,$$

el tensor métrico transformado vendrá dado por

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -e^{\nu(L, T)} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^2 + e^{\mu(L, T)} \left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)^2, \\ g_{xx} &= g_{XX} = R^2(l, t) = e^{\alpha(L, T)}, \\ g_{yy} &= g_{YY} = R^2(l, t) = e^{\alpha(L, T)}, \\ g_{zz} &= g_{ZZ} = R^2(l, t) = e^{\alpha(L, T)}, \\ g_{ll} &= -e^{\nu(L, T)} \left(\frac{\partial T}{\partial l} \right)^2 + e^{\mu(L, T)} \left(\frac{\partial L}{\partial l} \right)^2, \\ g_{tl} &= -e^{\nu(L, T)} \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial l} + e^{\mu(L, T)} \frac{\partial L}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial l}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Notemos que ahora el tensor métrico no es diagonal, aunque seguirá cumpliendo la condición de que el tensor de Einstein es nulo, o sea

$$G_{AB} = 0, \quad A, B = t, x, y, z, l,$$

dada la invariancia del tensor nulo respecto al cambio de variables [11].

De acuerdo con (6.3) podemos escribir explícitamente las condiciones dadas en (6.2) por medio de las siguientes ecuaciones

$$e^{\nu(L,T)} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^2 - e^{\mu(L,T)} \left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)^2 = 1, \quad (6.4)$$

$$R^2(l, t) = e^{\alpha(L,T)}. \quad (6.5)$$

Definiremos ahora el tensor métrico efectivo en 4-D. Para ello tendremos en cuenta que, desde nuestro punto de vista, todos los movimientos en la dirección de $\partial/\partial l$ no pueden ser vistos. Así, nuestro universo posee un tensor métrico dado por:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -1, \\ g_{xx} &= g_{yy} = g_{zz} = R(l, t)^2, \\ g_{ij} &= 0 \quad \text{si } i \neq j, \\ i, j &= t, x, y, z, \end{aligned} \quad (6.6)$$

que describe un espacio de Robertson Walker. Este proceso de "bajar" de 5 a 4-D, en realidad, es una proyección que actúa de la siguiente forma: si el tensor métrico en 5-D es

$$\tilde{g} = \sum_{i,j=t,x,y,z,l} g_{ij} \frac{\partial}{\partial i} \otimes \frac{\partial}{\partial j},$$

dado que no vemos lo que pasa en la dirección $\partial/\partial l$, pues como nosotros estamos en 4 dimensiones representadas por las coordenadas (t, x, y, z) , el tensor métrico inducido en 4-D estará dado por:

$$\tilde{g}^{ef} = \sum_{i,j=t,x,y,z} g_{ij} \frac{\partial}{\partial i} \otimes \frac{\partial}{\partial j},$$

que es el mismo que dimos en (6.6).

Si ahora hacemos cosmología en 4-D, consideramos la métrica (6.6) como una métrica tetradimensional dada y aplicamos la ecuación de Einstein

$$G_{ik} = -8\pi T_{ik}, \quad i, k = t, x, y, z,$$

donde T_{ik} es el tensor de energía momento dado por

$$T_{ik} = (\rho + p)U_i U_k + p g_{ik}, \quad i, k = t, x, y, z,$$

obtenemos las ecuaciones de Einstein "generalizadas":

$$H(t, l)^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}(t, l)}{R(t, l)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (6.7)$$

$$2\dot{H}(t, l) + 3H(t, l)^2 = -8\pi G p, \quad (6.8)$$

donde el punto indica, derivada parcial respecto de t .

Podemos obtener (6.8) como consecuencia de suponer que las ecuaciones de Einstein están contenidas en $G_{AB} = 0$ si agrupamos los términos de G_{tt} , G_{xx} , G_{yy} y G_{zz} que contienen a g_{ll} , g_{lt} y a las derivadas respecto de l , e identificándolos con la densidad (ρ) en G_{tt} y la presión (p) en G_{xx} , G_{yy} y G_{zz} .

Formalmente, si calculamos los elementos del tensor de Einstein en 5-D con la métrica dada por \tilde{g} , obtenemos

$$\begin{aligned}
 G_{tt} = & \left[3 \left(\frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(2g_{ll}g_{tt}^2 \left(\frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \right)^2 - g_{lt}^* g_{ll} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} - g_{ll}\dot{g}_{lt} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \right. \right. \\
 & - g_{ll}\dot{g}_{lt} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} - 2g_{lt}^* g_{lt} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} + 2g_{ll}g_{tt} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} + 4g_{ll}g_{tt} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \\
 & - 2g_{tt}^2 \dot{g}_{ll} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} + 4g_{ll}g_{tt} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} + 2g_{ll}g_{tt}^2 \frac{\ddot{R}(l, t)}{R(l, t)} + 2g_{ll} \left(\frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \right)^2 \\
 & + 2g_{lt} \left(\frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \right)^2 - g_{ll}^* \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} - 2g_{lt}g_{tt}^2 \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} - 2g_{tt}^3 \dot{g}_{ll} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \\
 & \left. \left. 2g_{tt}^4 \frac{\ddot{R}(l, t)}{R(l, t)} + 2g_{tt}^2 \frac{\ddot{R}(l, t)}{R(l, t)} + 2g_{ll} \frac{\ddot{R}(l, t)}{R(l, t)} + 4g_{tt}^3 \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4g_{tt}^3 \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} + 2g_{tt}^4 \left(\frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \right)^2 \right) (g_{ll} + g_{tt}^2)^{-2} \right] g_{tt}, \\
 G_{xx} = & \left[2 \frac{\ddot{R}(l, t)}{R(l, t)} + \left(\frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \right)^2 - \left(8g_{ll}g_{tt}^2 \frac{\ddot{R}(l, t)}{R(l, t)} - 2g_{ll}\dot{g}_{tt} + 4g_{tt}^2 \dot{g}_{ll} \right. \right. \\
 & + 8g_{tt}^2 \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} + 16g_{ll}g_{tt} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} + 4g_{ll}g_{tt}^2 \left(\frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \right)^2 + 16g_{tt}^3 \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \\
 & + 8 \frac{\ddot{R}(l, t)}{R(l, t)} g_{ll} - 2g_{tt}^2 g_{ll}^2 + 4g_{ll} \dot{g}_{tt} + 8g_{ll}g_{tt} \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} + 2g_{tt} \dot{g}_{ll} \dot{g}_{tt} \\
 & - 2\dot{g}_{tt} \dot{g}_{ll} - 4g_{ll}\dot{g}_{tt} \dot{g}_{tt} + \dot{g}_{ll}^2 - 4 \dot{g}_{ll} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} + 8g_{tt}^3 \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \\
 & \left. \left. + 8g_{ll}\dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} - 8g_{tt}^2 \dot{g}_{ll} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} - 4g_{ll}\dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l, t)}{R(l, t)} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +8g_{tt}g_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} + 8g_{tt} \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} - 4g_{tt}\dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} - 4g_{tt} \dot{g}_{tt}^* \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \\
 & -8g_{tt} \dot{g}_{tt}^* \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} + 4 \left(\frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 g_{tt} + 4g_{tt}^2 \left(\frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 \left(g_{tt} + g_{tt}^2 \right)^{-2} \Big] g_{xx}, \\
 \\
 G_{tt} = & -\frac{3}{2} \left[-g_{tt}^3 \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} + 4g_{tt}^3 g_{tt} \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} + 4g_{tt} g_{tt}^2 \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} \right. \\
 & + 2g_{tt}^2 \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} - 2g_{tt}^2 g_{tt}^2 \frac{\ddot{R}(l,t)}{R(l,t)} - 2g_{tt} g_{tt}^2 \frac{\dot{R}^{**}(l,t)}{R(l,t)} + 4g_{tt}^3 g_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} \\
 & + 4g_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} + g_{tt} g_{tt}^2 \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} + 2g_{tt}^3 g_{tt} \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} + g_{tt}^3 g_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} - \\
 & 2g_{tt} g_{tt}^2 \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} - 2g_{tt}^3 \left(\frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 + 2g_{tt}^2 \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 2g_{tt}^2 \left(\frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 \\
 & - 2g_{tt} \dot{g}_{tt} g_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} - g_{tt}^2 g_{tt} \dot{g}_{tt} - 2g_{tt}^3 \frac{\ddot{R}(l,t)}{R(l,t)} - 2g_{tt}^2 g_{tt}^2 \left(\frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 \\
 & \left. + 2g_{tt} g_{tt}^2 \left(\frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 - 2g_{tt}^4 \frac{\dot{R}^{**}(l,t)}{R(l,t)} \right] \left(g_{tt} + g_{tt}^2 \right)^{-2}, \\
 \\
 G_{tt} = & \frac{3}{2} \left[4g_{tt}^4 \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} + 2g_{tt}^3 \left(\frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 + 2g_{tt} g_{tt} \frac{\dot{R}^{**}(l,t)}{R(l,t)} - 2g_{tt} g_{tt}^2 \frac{\ddot{R}(l,t)}{R(l,t)} \right. \\
 & + 2g_{tt} g_{tt} \left(\frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 + g_{tt} g_{tt} \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} - 2g_{tt} g_{tt}^2 \left(\frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 - g_{tt} g_{tt} \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} \\
 & + 2g_{tt} g_{tt} \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 2g_{tt} g_{tt}^2 \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 2g_{tt}^3 \frac{\dot{R}^{**}(l,t)}{R(l,t)} - 2g_{tt} g_{tt}^3 \frac{\ddot{R}(l,t)}{R(l,t)} \\
 & - 2g_{tt}^2 \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} + 4g_{tt}^2 g_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} \dot{g}_{tt} g_{tt} \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} - g_{tt}^2 g_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \\
 & \left. - g_{tt}^3 \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} - 2g_{tt} g_{tt}^3 \left(\frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 - 2g_{tt}^2 \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} + 2g_{tt}^4 \frac{\dot{R}^*(l,t)}{R(l,t)} \right] \left(g_{tt} + g_{tt}^2 \right)^{-2},
 \end{aligned}$$

donde hemos puesto solamente la componente G_{xx} del tensor de Einstein pentadimensional dado que G_{yy} y G_{zz} son exactamente iguales a G_{xx} solo hay que reemplazar x por y o z respectivamente. Si ahora agrupamos en ρ y

p los términos que contienen a g_u , g_{tt} y las derivadas con respecto a l como lo indican las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
 8\pi G\rho = & \frac{3}{2} \left[2g_u g_{tt}^2 \left(\frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 - g_{tt} \dot{g}_u \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} - g_u \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \right. \\
 & - g_{tt} \dot{g}_u \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} - 2g_{tt} \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 2g_u g_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 4g_{tt} g_u \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \\
 & - 2g_{tt}^2 \dot{g}_u \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 4g_{tt} g_u \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 2g_u g_{tt}^2 \frac{\ddot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 2g_u \left(\frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 \\
 & + 2g_{tt} \left(\frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 - \dot{g}_u \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} - 2\dot{g}_{tt} g_{tt}^2 \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} - 2g_{tt}^3 \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \\
 & \left. + 2g_{tt}^4 \frac{\ddot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 2g_{tt}^2 \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 2g_u \frac{\ddot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 4g_{tt}^3 \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \right. \\
 & \left. + 4g_{tt}^3 \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 2g_{tt}^4 \left(\frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 \right] (g_u + g_{tt}^2)^{-2}, \\
 8\pi Gp = & - \left[8g_u g_{tt}^2 \frac{\ddot{R}(l,t)}{R(l,t)} - 2g_u \ddot{g}_u \right. \\
 & + 4g_{tt}^2 \dot{g}_{tt} + 8g_{tt}^2 \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 16g_u g_{tt} \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 4g_u g_{tt}^2 \left(\frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 \\
 & + 16g_{tt}^3 \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 8 \frac{\ddot{R}(l,t)}{R(l,t)} g_u - 2g_{tt}^2 g_{tt}^2 + 4g_u \dot{g}_{tt} + 8g_u g_{tt} \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \\
 & + 2g_{tt} \dot{g}_{tt} \dot{g}_u - 2\dot{g}_{tt} \dot{g}_u - 4g_{tt} \dot{g}_{tt} \dot{g}_u + \dot{g}_{tt}^2 - 4 \dot{g}_u \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \\
 & + 8g_{tt}^3 \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 8g_u \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} - 8g_{tt}^2 \dot{g}_u \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} - 4g_{tt} \dot{g}_u \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \\
 & + 8g_{tt} g_u \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 8g_u \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} - 4g_u \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} - 4g_{tt} \dot{g}_u \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \\
 & \left. - 8g_{tt} \dot{g}_{tt} \frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} + 4 \left(\frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 g_u + 4g_{tt}^2 \left(\frac{\dot{R}(l,t)}{R(l,t)} \right)^2 \right] (g_u + g_{tt}^2)^{-2}.
 \end{aligned}$$

y hacemos los reemplazos correspondientes en G_{tt} , G_{xx} , G_{yy} y G_{zz} , llegamos a

$$\begin{aligned} G_{tt} &= (3H(l, t)^2 - 8\pi G\rho) g_{tt} = 0, \\ G_{xx} &= \left(2\dot{H}(l, t) + 3H(l, t)^2 + 8\pi Gp\right) g_{xx} = 0, \\ G_{yy} &= \left(2\dot{H}(l, t) + 3H(l, t)^2 + 8\pi Gp\right) g_{yy} = 0, \\ G_{zz} &= \left(2\dot{H}(l, t) + 3H(l, t)^2 + 8\pi Gp\right) g_{zz} = 0, \end{aligned}$$

que son las ecuaciones buscadas.

Es importante resaltar que, a diferencia de la teoría de materia inducida, nosotros no estamos definiendo a nuestro universo como una hipersuperficie del espacio total que corresponde a $l = cte$. Es por ello que el factor de escala ($R(t, l)$), el parámetro de Hubble ($H(t, l)$) y los demás parámetros cosmológicos, pueden variar con l . Por lo tanto la evolución del universo, según esta teoría, depende, en principio, también de como se mueve la última coordenada (l). En otras palabras, lo que nosotros observamos es una consecuencia directa de la evolución independiente de ambas coordenadas. Es por ello que todos los parámetros pueden tener una dependencia en la coordenada l . Así, no necesitamos analizar las etapas del universo por partes sino que, desde este punto de vista, es posible hacerlo desde su comienzo hasta el final considerando una sola métrica donde los coeficientes no se tienen que tomar convenientemente para cada etapa, sino que ya están dados por el modelo desde el comienzo.

Antes de seguir adelante miremos con mas detalle la suposición de que $G_{AB} = 0$. Para ello, primero recordemos que la ecuación $G_{ik} = 8\pi GT_{ik}$ generaliza la ecuación de Poisson para el campo gravitatorio $\Delta\phi = \rho$. Es por este motivo que podemos decir que $G_{AB} = 0$ es equivalente a pedir que no hay ningún tipo de fuentes. El caso que $G_{AB} \neq 0$ nos dice que las ecuaciones de Einstein no están satisfechas, o que hay un término que no estamos considerando y que, en principio, podría ser interpretado como la constante cosmológica si razonamos de la siguiente manera: supongamos que $G_{AB} \neq 0$ por el momento y que, por ejemplo

$$G_{AB} = \Lambda \tilde{g}_{AB}, \quad A, B = T, X, Y, Z, L$$

donde Λ es una constante y \tilde{g}_{AB} es el tensor métrico pentadimensional que cumple esta condición. Haciendo un tratamiento muy similar al que hicimos para $\Lambda = 0$, es decir, definiendo la presión y la densidad de energía en la forma funcional de los coeficientes de la métrica que dimos antes, podemos obtener

$$\begin{aligned} G_{tt} &= (3H(t, l)^2 - 8\pi G\rho) g_{tt} = \Lambda g_{tt}, \\ G_{xx} &= \left(2\dot{H}(l, t) + 3H(l, t)^2 + 8\pi Gp\right) g_{xx} = \Lambda g_{xx}, \end{aligned}$$

$$G_{yy} = \left(2\dot{H}(l, t) + 3H(l, t)^2 + 8\pi G\rho\right) g_{yy} = \Lambda g_{yy},$$

$$G_{zz} = \left(2\dot{H}(l, t) + 3H(l, t)^2 + 8\pi G\rho\right) g_{zz} = \Lambda g_{zz}.$$

Estas ecuaciones nos permiten expresar que el origen y lo que representa la constante cosmológica se relaciona con la curvatura del espacio pentadimensional en el que está inmerso nuestro universo, y estaría dada en términos de la componente G_{ll} del tensor de Einstein, según esta representación, por medio de:

$$\Lambda = G_{ll}(g_{ll})^{-1}.$$

Aunque es un resultado muy interesante, nosotros seguiremos nuestros principios, por los cuales no estamos de acuerdo con la introducción de ésta constante a las ecuaciones de Einstein y por lo tanto la consideramos igual a cero. En otras palabras, el valor teórico empírico de la constante cosmológica para nosotros será cero, hecho que confirman los resultados experimentales.

Todos los parámetros cosmológicos ahora se pueden definir en función de $R(l, t)$ de la misma forma que antes, sólo que ahora las derivadas respecto de t son parciales. Estos, a priori, tendrán una dependencia en la coordenada l . Así, por ejemplo, el factor de desaceleración estará dado por:

$$q = -\frac{\frac{\partial^2 R(t, l)}{\partial t^2} R(t)}{\left(\frac{\partial R(t, l)}{\partial t}\right)^2}.$$

6.3. Inflación en este nuevo formalismo

Inflación es una teoría que surgió para resolver algunos problemas del modelo estándar [5] [23]. En general la solución a éstos está relacionada a la cantidad de ordenes de magnitud que aumenta el factor de escala durante un instante de tiempo muy pequeño denominado período inflacionario.

En general, cuando se trabaja en inflación, se define un campo escalar y se lo hace rodar lentamente por una curva potencial que se ajusta al modelo inflacionario particular. Así, se obtienen las ecuaciones de movimiento, la expresión para la densidad de energía y luego, mediante una aproximación semiclásica, se define el campo inflatón, cuya forma estaba íntimamente relacionada con el parámetro de Hubble [16]. Este formalismo pasa luego a la teoría de materia inducida casi sin alteración [18].

En nuestra teoría, al igual que en las demás [2], definiremos el período inflacionario como aquel en el que el factor de desaceleración es negativo y el universo satisface la condición de vacío³, es decir

$$q = -\frac{\frac{\partial^2 R(t, l)}{\partial t^2} R(t)}{\left(\frac{\partial R(t, l)}{\partial t}\right)^2} < 0,$$

³Las mismas condiciones definirán para nosotros el estado inflacionario del universo

$$p \simeq -\rho,$$

donde $R(l, t)$ es el factor de escala. Pero, a diferencia de antes, no veremos al período inflacionario gobernado por el movimiento de un campo escalar, sino por el movimiento de la quinta coordenada en el espacio pentadimensional.

El período inflacionario debe cumplir con alguna condición para tratar las soluciones a los problemas del modelo cosmológico estándar. En esa dirección definamos el número de desdoblamientos exponenciales n que mide los ordenes de magnitud que incrementa el factor de escala durante el período inflacionario. En general para $n \geq 60$, es posible ver [2] que los problemas más importantes del modelo estándar se solucionan.

$$n = \ln \left(\frac{R(t, l)}{R(t_0, l_0)} \right), \quad (6.9)$$

donde t_0 es el tiempo inicial y t es el momento en que inflación finaliza, lo mismo para l_0 y l .

Como ya dijimos antes, para nosotros el período inflacionario, al igual que toda la evolución del universo, estará gobernado por un comportamiento particular de la coordenada l y de la métrica durante el mismo. En principio parecería que solucionamos los problemas trasladándolos a la coordenada l , pero hacer ésto se puede considerar equivalente a elegir arbitrariamente una curva de potencial en la que rueda un campo, para resolver las cosas. Por otro lado, si suponemos que el paso por las diferentes etapas durante la evolución del universo está gobernado por el comportamiento de la coordenada l , entonces es natural que también lo haya sido en su instante inicial.

6.4. Ejemplo

Veamos un ejemplo de como funciona este formalismo que acabamos de ver. Consideremos la métrica obtenida originalmente por J. Ponce de León [25] cuyos coeficientes son

$$\begin{aligned} g_{TT} &= -L^2, \\ g_{XX} = g_{YY} = g_{ZZ} &= R_0^2 A T^{2\beta} L^{\frac{2\beta}{1-\beta}}, \\ g_{LL} &= \frac{1}{(\beta-1)^2} T^2, \\ g_{ij} &= 0 \quad \text{si } i \neq j, \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde R_0 , β y A son constantes ($\beta \neq 0, 1$). Aquí R_0 tiene unidades de longitud y A las correspondientes para que g_{XX} tenga unidades de longitud al cuadrado. Se puede ver que, así definida, ésta es una métrica que describe un espacio penta-dimensional plano ($G_{AB} = 0$).

Comparando con (6.1) obtenemos

$$\nu(L, T) = 2 \ln(L), \quad \alpha(L, T) = \frac{2\beta}{1-\beta} \ln(L) + 2\beta \ln(T) + \ln(R_0^2 A),$$

$$\mu(L, T) = 2 \ln \left(\frac{T}{1 - \beta} \right).$$

Por lo tanto, reemplazando en las ecuaciones (6.4) y (6.5), vemos que las condiciones de la transformación son

$$1 = L^2 \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{(\beta - 1)^2} \left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)^2,$$

$$R_0^2 A T^{2\beta} L^{\frac{2\beta}{1-\beta}} = R(l, t)^2.$$

Notemos (de la segunda de estas ecuaciones) que en el contexto de esta teoría, parece casi inevitable la dependencia del factor de escala de la quinta coordenada.

Ahora vamos a incluir el modelo cosmológico estándar por medio de $R(l, t)$. Recordemos, del capítulo 3, que en éste modelo se cumplía $R(t) \sim t^b$, donde b era una constante que tenía distintos valores en las diferentes etapas del universo. Vamos a relacionar ahora esta constante con la quinta coordenada, de la siguiente forma: consideremos el caso

$$R(l, t) = R_0 \left(\frac{t}{t_p} \right)^{1/l},$$

Aquí estamos estableciendo que el parámetro b del modelo estándar es en realidad $1/l$. Así podemos explicar porqué cambia durante la evolución del universo. Dicho de otra forma, la evolución del universo está gobernada por el movimiento del mismo a través de una quinta coordenada. Notemos que l ahora es adimensional, o sea, es un número.

Una vez especificado $R(l, t)$ podemos ver, por ejemplo para $\beta = 3$, que la forma de la transformación es

$$L(l, t) = \frac{3 (A^{1/3} l^2 t^2 (t/t_p)^{-2/3l})^{1/3}}{(6l + 1)^{1/3}}$$

$$T(l, t) = \sqrt{L(l, t)} A^{-1/6} \left(\frac{t}{t_p} \right)^{1/3l}$$

Si hacemos cosmología como definimos en este capítulo, realizando las cuentas obtenemos que el parámetro de Hubble está dado por

$$H(t, l) = \frac{1}{tl}.$$

Siguiendo las ecuaciones de Einstein generalizadas, la densidad energía y la presión vendrán dadas por

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{1}{lt} \right)^2,$$

$$p = \frac{1}{8\pi G} \left(\frac{2}{l} - \frac{3}{l^2} \right) \frac{1}{t^2}.$$

Usando ésto obtenemos que la ecuación de estado obedece la expresión

$$p = \left(-1 + \frac{2}{3}l \right) \rho,$$

y que el factor de desaceleración es

$$q = -1 + l,$$

Estas dos últimas ecuaciones nos muestran la dinámica del universo y nos dan una forma de obtener el valor de l a partir de mediciones experimentales. Podemos ver así que actualmente la quinta coordenada cambia mucho mas lentamente que el tiempo .

Suponiendo que inflación comenzó en $t_p = 5,4 \times 10^{-44}$ seg (el tiempo de Planck) y aproximadamente terminó en $t = 10^{-35}$ seg, obtenemos (considerando $l \simeq cte$ durante éste tiempo)

$$n \simeq \frac{19}{l}.$$

Por lo tanto, si durante el período inflacionario $l \sim 0,3$, lo que equivale a una densidad inicial de $\rho_0 \simeq 1,33M_p^4$ ($M_p = t_p^{-1}$ es la masa de Planck), llegamos a

$$n \simeq 63.$$

Esto permitiría, en principio, resolver los problemas de planaridad y del horizonte.

Por lo tanto, según este modelo, podemos pensar que el universo se originó en un punto del espacio tiempo extendido correspondiente a $t \sim 0$ y $l \sim 0$ y que en su evolución (al principio) la quinta coordenada crece más rápidamente que t , lo que dio lugar al período inflacionario, para luego detenerse y moverse mucho mas lentamente respecto del tiempo. Notemos que aquí, el universo comienza en un estado de vacío ($\omega \simeq -1$) como lo demuestra la ecuación de estado.

Capítulo 7

Conclusiones

La Física es una de las disciplinas, sino la fundamental, en la que se basa el hombre para dar su percepción de la realidad natural. No olvidemos que teorías como la de gravitación en los tiempos de Newton y más adelante, la Mecánica Cuántica y de la Relatividad, revolucionaron en el hombre, no sólo la forma de ver la naturaleza, sino también la forma de pensar. En general la labor del que se dedica a esta rama de la ciencia se caracteriza por proponer modelos para describir y explicar los distintos procesos de la naturaleza, y los juzga en base a sus predicciones o a la veracidad de sus resultados respecto de la observación de lo que se quiere describir. Sin embargo, en algunos casos hay grandes problemas para observar y comparar, por lo tanto la física está lejos de conocer lo que es la realidad. Si bien es cierto que día a día los modelos son mejores y la coincidencia con las observaciones son asombrosas, siempre queda algo en el tintero o sin resolver, es decir, siempre hay un porqué que no se puede responder. Ésto se puede aplicar directamente a la faz cosmológica de la naturaleza. Para ésta los modelos son muchos pero las certezas son pocas. Hay en el cosmos algo oculto, velado a nuestra imaginación al grado extremo de no saber lo que es, por lo menos hasta ahora, que no nos permite develar gran parte de sus secretos. Quizá más adelante, si es que hay una mayor y mejor navegación del hombre por el espacio, que le permita observar con mayor detalle el universo nuestro conocimiento en este tema se amplíe enormemente. Por el momento tendremos que conformarnos con nuestros modelos y descripciones corriendo el riesgo de que quizá, en el futuro, sean tildados de ingenuos.

En este trabajo se estudio básicamente la Teoría de Materia inducida propuesta originalmente por P.S Wesson y J. Ponce de León y que surgió con la idea de explicar la propiedad física masa por medio de propiedades geométricas de un espacio de dimensión mayor a las cuatro que nosotros observamos. En su interpretación cosmológica, para mostrar su carácter de válida, incluyó varios modelos entre ellos el modelo estándar.

Siguiendo la idea de incluir la cosmología en 5-D, por un lado vimos una

forma de incluir modelos inflacionarios mediante cambio de coordenadas de forma tal que el observador parado en el nuevo sistema de referencia ve un universo de Robertson - Walker. Aquí la nueva coordenada introducida está relacionada en forma muy íntima con el parámetro de Hubble, que es por excelencia la magnitud a medir en cosmología. A partir de allí obtuvimos un modelo por medio del cual hallamos la forma de este parámetro y que en principio parece estar de acuerdo a lo esperado en un modelo inflacionario. También este formalismo nos deja la puerta abierta para estudiar e incluir nuevos modelos inflacionarios.

Por otro lado, quisimos cambiar la forma de ver la teoría de materia inducida y la reinterpretemos de forma tal que se adaptara a lo que nosotros queríamos. También en esta reinterpretación presentamos mecanismos para hallar modelos cosmológicos y la forma de incluir el escenario inflacionario. En el camino obtuvimos dos resultados interesantes:

- el factor de escala debe depender, en principio, de la nueva coordenada introducida,
- la constante cosmológica parece estar relacionada con la curvatura del espacio pentadimensional en que está inmerso nuestro universo.

También aquí mostramos un modelo que contiene al estándar y que nos "permitiría" describir al universo a lo largo de su evolución.

Las teorías presentadas, en principio, son diferentes y no parecen ser dos caras de una misma moneda. Pero mirando mejor las cosas puede que no sea así. La conexión parece estar dada por el punto de vista del observador. En el primero el observador está dentro del espacio, mira las cosas según sus coordenadas (t, x, y, z) y asocia a la coordenada adicional una dinámica en función de lo que podemos medir (ver capítulo 5). En cambio en el segundo el punto de vista es desde afuera, o sea desde el espacio pentadimensional. El observador mira una proyección de su espacio y determina la dinámica del espacio proyectado a partir de ella. Ambos casos coinciden en que se necesita saber la evolución de la quinta coordenada para modelar el universo (ver capítulo 6). Ésto, aunque parece un problema, en realidad es de esperar si queremos describir nuestro universo como si estuviera inmerso en un espacio más grande.

Bibliografía

- [1] Robert M. Wald, *General Relativity*. The university of Chicago Press. (1984).
- [2] Andrei Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. Harwood academic publishers. (1990).
- [3] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. (1987).
- [4] M. Bellini, *Inflación del universo. Una aproximación estocástica*. (2000).
- [5] A. H. Guth. Phys. Rev. D **23**,347(1981).
- [6] R. Wald, S. Hollans. An alternative to inflation [arXiv:grqc/0205058]
- [7] Paul S. Wesson, *Space-Time-Matter. Modern Kaluza Klein theory*. World Scientific. (1999).
- [8] Phys. Rev. D **66**. (2002).
- [9] Manfredo P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides. (1988).
- [10] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications (second edition)*. Springer. (1988).
- [11] Daniel Martin, *Manifold Theory. An introduction for Mathematical Physicist*. Ellis Horwood. (1991).
- [12] Albert Einstein, *El significado de la relatividad*. Traducción de Alianza Editorial S. A. y Espasa Calpe S. A. cedida a Planeta Agostini. (1993).
- [13] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology*. Wiley. (1972).
- [14] G. Gamow. Phys. Rev. **70**, 572. (1946). R. A. Alpher, H. Bethe y G. Gamow Phys. Rev. **73**, 803. (1948).

- [15] R. A. Alpher y R. C. Herman. *Phys. Rev.* **74**, 1734 (1948). *Phys. Rev.* **75**, 1089. (1949).
- [16] M. Bellini, H. Casini, R. Montemayor, P. Sisterna. *Phys. Rev. D* **54** 7172. (1996).
- [17] A. Starobinsky. *Current Topics in Field Theory, Quantum Gravity and Strings*, en: *Lecture Notes in Physics*. Springer. (1986).
- [18] M. Bellini. *Nuclear Physics B* **660**, 389. (2003).
- [19] D. S. Ledesma, M. Bellini. *Phys. Letters B* **581**, 1. (2004).
- [20] Sanjeev S. Seahra, P. S. Wesson. *Class. Quantum Grav.* **20**, 1321. (2003).
- [21] T. Kaluza. *Situngsber: Preuss. Akad. Berlin. Math. Phys.* **K1**, 966. (1921).
- [22] O. Klein. *Z Phys.* **37**, 895. (1926).
- [23] A. D. Linde. *Phys. Lett. B* **108**, 389. (1982).
- [24] P. S. Wesson. *G. Rel. Gravit.* **16**, 193. (1984). J. Ponce de León. *G. Rel. Gravit.* **20**, 539. (1988). P. S. Wesson, J. Ponce de León. *J. Math. Phys.* **33**, 3883. (1992). A. A. Coley, D. J. McManus. *J. Math. Phys.* **36**, 335. (1995). J. M. Overduin, P. S. Wesson, *Phys. Reports* **283**, 303. (1997).
- [25] J. Ponce de León. *G. Rel. Gravit.* **20**, 539.(1988).