

Álgebra II

CONTENIDOS MÍNIMOS:

Espacios vectoriales. Generadores. Bases. Espacio dual. Espacios vectoriales con producto interno. Bases ortonormales. Método de Gram-Schmidt. Autovalores y autovectores. Polinomio característico y minimal. Formas normales. Formas bilineales.

PROGRAMA ANALÍTICO:

UNIDAD 1. ESPACIOS VECTORIALES

Espacios Vectoriales sobre un cuerpo K . Definición y ejemplos: espacios de las n -uplas K . Espacios de las matrices. Espacios de los polinomios $K[x]$. Espacios de las aplicaciones de un conjunto X , no vacío. Subespacios: definición, ejemplos, caracterizaciones. Generadores de un subespacio. Operaciones en familias de subespacios: intersección y suma. Suma directa.

UNIDAD 2. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Definición y ejemplos. Conjuntos linealmente dependientes y conjuntos linealmente independientes. Métodos de triangulación para analizar dependencia e independencia lineal de vectores. Bases de un espacio vectorial, existencia de bases en espacios vectoriales finitamente generados. Dimensión. Relación entre la dimensión de un espacio vectorial y el cardinal de los conjuntos linealmente independientes y el cardinal de un conjunto de generadores. Dimensión de subespacios. Existencia de los subespacios y la dimensión de los mismos.

UNIDAD 3. TRANSFORMACIONES LINEALES

Definición y ejemplos. Imagen y preimagen de un subespacio por una transformación lineal. Subespacios núcleo e imagen. Composición de transformaciones lineales. Monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo, endomorfismo, automorfismo. Inversas a izquierda, inversas a derecha. Inversa de un isomorfismo.

UNIDAD 4. BASES Y TRANSFORMACIONES LINEALES

Extensión de una aplicación definida en una base, a una transformación lineal del espacio. Caracterización de los monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos. Teorema de la dimensión del núcleo e imagen de una transformación lineal entre espacios finitamente generados. Aplicaciones al estudio de la dimensión del subespacio de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo. Producto directo de K -espacios vectoriales. Proyecciones. Álgebra de matrices. Matrices elementales, matrices inversibles. Operaciones elementales de fila y columna en una matriz. Inversa de una matriz elemental. Matrices equivalentes por filas y por columnas. Matrices reducidas por filas y por columnas. Matrices escalón reducidas por filas y escalón reducidas por columnas. Equivalencia por filas de una matriz a un escalón reducida por filas (Análogo por columnas). Aplicación al cálculo de inversa de una matriz y al cálculo del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Combinación lineal de un sistema; sistemas equivalentes. Rango de filas y rango de columnas de una matriz. Rango de una matriz. Compatibilidad de sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos.

UNIDAD 5. TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES

Álgebra de las transformaciones lineales entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo. Isomorfismo con el espacio de matrices. Bases Ordenadas. Matriz de las coordenadas de un vector respecto de una base ordenada. Matriz cambio de base. Matriz asociada a una transformación lineal de dos bases dadas. Relación entre la composición de transformaciones lineales y el producto de matrices. Matriz asociada a un isomorfismo. Relación entre la dimensión de la imagen de una transformación lineal y el rango de la matriz asociada. El Grupo General lineal. Matrices equivalentes y semejantes. Aplicación a proyecciones.

UNIDAD 6. DIAGONALIZACIÓN

Definición de espacio dual. Dimensión del dual de un espacio vectorial de dimensión finita: base dual; isomorfismo canónico con su doble dual. Hiperespacios. Álgebra sobre un cuerpo: definición, ejemplos. Álgebra de polinomios, álgebra de matrices, álgebra de endomorfismos de un espacio vectorial. Especialización de x por un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita: polinomio minimal de un endomorfismo: existencia y unicidad. Polinomio minimal de una matriz cuadrada. Vectores y valores propios de endomorfismos y de matrices cuadradas. Polinomio característico de un endomorfismo y de una matriz: matriz característica. Relación entre valores propios de un endomorfismo y las raíces de sus polinomios minimal y característico. Endomorfismos diagonales. Subespacios invariantes respecto de un endomorfismo. Potencias de una matriz diagonalizable.

UNIDAD 7. FORMAS CANÓNICAS ELEMENTALES

Operadores nilpotentes. Existencia de la forma canónica de Jordan para operadores sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Métodos de cálculo de la Forma de Jordan. Exponencial de una matriz.

UNIDAD 8. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

Productos internos. Definición, ejemplos. Identidades de polarización. Espacios producto interno. Desigualdad de Cauchy-Schwartz. Ortogonalidad y ortonormalidad. Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Proyección ortogonal. La mejor aproximación. Desigualdad de Bessel.

UNIDAD 9. OPERADORES EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

Operadores en espacios con producto interno. Adjunto de un operador. Operadores autoadjuntos. Operadores unitarios. Operadores normales. Teorema Espectral. Formas bilineales. Formas simétricas.

BIBLIOGRAFIA

- Hoffman, Kenneth; Kunze, Ray; - *Álgebra lineal*. 1ed. México : Pearson educación, 1973. xiii; 400p
- Lages Lima, Elon .*Álgebra Linear*. Projeto Euclides. IMPA. Brasil.
- Ulhoa Coelho, Flavio; Lourenço, Mary Lilian. Um curso de Álgebra Linear. Edusp. Brasil.
- de la Peña, Jose Antonio. *Álgebra Linear Avanzada*. UNAM : México, 1996.
- Larrottonda, Angel. *Álgebra Lineal y Geometría*. Buenos Aires : Eudeba, 1977
- Greub, Werner. *Linear Algebra*. Berlin : Springer-Verlag, 1955
- Gentile, Enzo *Espacios Vectoriales*. Buenos Aires : Functor, 1968
- Mostow, George D., Sampson, Joseph H.; Meyer, Jean-Pierre. *Fundamental Structures of Algebra*, McGraw-Hill, New York 1963.
- Halmos, P. R. *Finite-dimensional vector spaces*. — 2 ed. — Princeton : Van Nostrand D., 1958
- Godement: *Álgebra*; Tecnos, 1978.

- Birkhoff, Garret; Mclane, Saunders *Algebra moderna*. Teide
- Lang, Serge. *Linear algebra*, New York : Addison Wesley, 1984